LÊ BÍCH NGỌC *(chủ biên)* - LÊ HỒNG ĐỨC

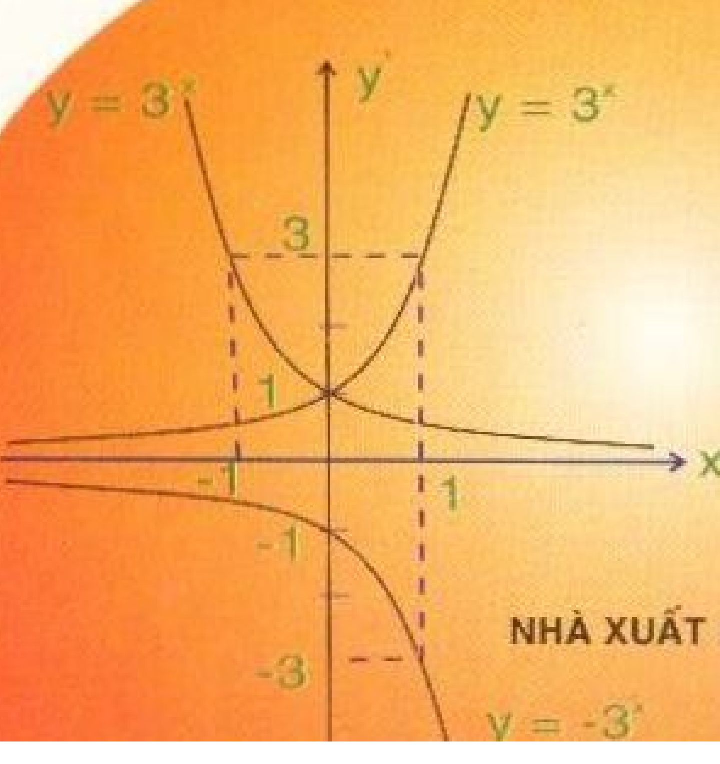
HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN

Đại số & Giải tích

11

(Tái bản lần thứ nhất)

(Dùng cho học sinh ban A và luyện thi Đại học)



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ BÍCH NGỌC(Chủ biên)
LÊ HỒNG ĐỨC

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN
ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH
11

*Biên soạn theo **SGK** mới của Bộ Giáo duc & Đào tạo*
*Dùng cho học **sinh ban A** và luyện thi Đại học*

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 39714896; (04) 39724770. Fax: (04)3 9714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: **NGUYỄN TRỌNG HẢI**
Sửa bài: **THÁI VĂN**
Chế bản: **Nhà sách HỒNG ÂN**

Trình bày bìa: **THÁI HỌC**

Thực hiện liên kết: **Nhà sách HỒNG ÂN**

SÁCH LIÊN KẾT

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH 11
Mã số: 1L - 467ĐH2010
In 1.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao Bì Phong Tân - TP. Hồ Chí Minh.
Số xuất bản: 810 - 2010/CXB/19 - 143/ĐHQGHN, ngày 13/8/2010
Quyết định xuất bản số: 464LK-TN/QĐ - NXBĐHQGHN.
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2010.

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ sách:

HỌC VÀ ÔN TẬP

TOÁN

do nhóm Cự Môn dưới sự phụ trách của Thạc sĩ Toán học – Kĩ sư Tin học Lê Hồng Đức biên soạn.

Bộ sách gồm 8 cuốn:

Cuốn 1 : Học và ôn tập Toán - Hình học 10
Cuốn 2 : Học và ôn tập Toán - Đại số 10
Cuốn 3 : Học và ôn tập Toán - Lượng giác 11
Cuốn 4 : Học và ôn tập Toán - Hình học 11
Cuốn 5 : Học và ôn tập Toán - Đại số và Giải tích 11
Cuốn 6 : Học và ôn tập Toán - Hình học 12
Cuốn 7 : Học và ôn tập Toán - Giải tích 12
Cuốn 8 : Học và ôn tập Toán - Đại số tổ hợp 12

Mục tiêu của bộ sách này là cung cấp cho các thầy, cô giáo một bộ bài giảng chuyên sâu có chất lượng và cho các em học sinh Trung học phổ thông yêu thích môn Toán một bộ sách học tập bổ ích.

Bộ sách được viết trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, tận dụng được đầy đủ thế mạnh của các phương pháp đặc biệt để giải Toán.

Bộ sách này chắc chắn phù hợp với nhiều đối tượng bạn đọc từ các thầy, cô giáo đến các em Học sinh lớp 10, 11, 12 và các em chuẩn bị dự thi môn Toán Tốt nghiệp PTTH hoặc vào các Trường Đại học.

Cuốn

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN
ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

do Lê Bích Ngọc chủ biên được chia thành 4 chương:

Chương I: Tổ hợp và xác suất
Chương II: Dãy số – Cấp số cộng và cấp số nhân
Chương III: Giới hạn
Chương IV: Đạo hàm

bao gồm 16 chủ đề, miêu tả chi tiết phương pháp giải cho 93 dạng toán cơ bản và nâng cao của Đại số và Giải tích 11.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Nhóm Cự Môn
Số nhà 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ -Hà Nội

Hà nội, ngày 2 tháng 9 năm 2005

Thay mặt nhóm tác giả LÊ HỒNG ĐỨC

CHƯƠNG I

TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

CHỦ ĐỀ 1

HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. QUY TẮC CỘNG

1.1. Định nghĩa

Để làm quen với quy tắc cộng, chúng ta sẽ bắt đầu với ví dụ sau:

Thí dụ 1: Giả sử cần chọn hoặc là một học sinh nam của khối 12 hoặc là một học sinh nữ của khối 11 làm đại biểu trong hội đồng của một trường THPT. Hỏi có bao nhiêu cách chọn vị đại biểu này nếu khối 12 có 81 học sinh nam và khối 11 có 72 học sinh nữ ?

Giải

Ta gọi:

- Việc thứ nhất là việc chọn một học sinh nam của khối 12, nó có thể làm bằng 81 cách.
- Việc thứ hai là việc chọn một học sinh nữ của khối 11, nó có thể làm bằng 72 cách.

Theo quy tắc cộng có:

$$81 + 72 = 153$$

cách chọn vị đại diện này.

Như vậy, ta có thể tóm tắt ***quy tắc cộng*** như sau:

Giả sử có hai công việc:

- *Việc thứ nhất có thể làm bằng n_1 cách*
- *Việc thứ hai có thể làm bằng n_2 cách*

và nếu hai việc này không thể làm đồng thời, khi đó sẽ có:

$n_1 + n_2$ *cách làm một trong hai việc trên.*

Quy tắc cộng dạng tổng quát:

Giả sử các việc $T_1, T_2, ..., T_m$ có thể làm tương ứng bằng $n_1, n_2..., n_m$ cách và giả sử không có hai việc nào có thể làm đồng thời. Khi đó, số cách làm một trong m việc đó là:

$$n_1 + n_2 + ... + n_m.$$

Quy tắc cộng mở rộng có thể chứng minh bằng quy nạp toán học từ quy tắc cộng cho hai tập hợp.

1.2. Biểu diễn dưới dạng tập hợp

Quy tắc cộng thường được phát biểu bằng ngôn ngữ tập hợp như sau:

1. Nếu X, Y là hai tập hữu hạn, không giao nhau, thì:

$$|X + Y| = |X| + |Y|.$$

2. Nếu $X_1, X_2, ..., X_n$ là n tập hữu hạn, từng đôi một không giao nhau, thì:

$$|X + X_2 + ... + X_n| = |X_1| + |X_2| + ... + |X_n|.$$

3. Nếu X, Y là là hai tập hữu hạn và $X \subseteq Y$, thì:

$$|\overline{X}| = |Y \setminus X| = |Y| - |X|.$$

2. QUY TẮC NHÂN

2.1. Định nghĩa

Để làm quen với quy tắc nhân, chúng ta sẽ bắt đầu với ví dụ sau:

Thí dụ 2: Để lập hồ sơ thi tuyển vào đại học, mỗi thí sinh cần thực hiện hai việc:

1. Thứ nhất, chọn trường thi, có tất cả 33 trường.
2. Thứ hai, chọn khối thi, mỗi trường có 4 khối thi là A, B, C, D.

Hỏi có bao nhiêu cách lập hồ sơ ?

Giải

Ta thấy ngay, có 33 cách chọn trường thi và ứng với mỗi cách chọn trường đó, có 4 cách chọn khối để thi.

Do đó, có tất cả:

$33 \times 4 = 132$ cách lập hồ sơ.

Như vậy, ta có thể tóm tắt ***quy tắc nhân*** như sau:

Giả sử, để hoàn thành một nhiệm vụ H cần thực hiện hai công việc nhỏ là H_1 và H_2, trong đó:

- *H_1 có thể làm bằng n_1 cách*
- *H_2 có thể làm bằng n_2 cách, sau khi đã hoàn thành công việc H_1.*

Khi đó, để thực hiện H sẽ có:

$$n_1 n_2 \text{ cách.}$$

Quy tắc nhân dạng tổng quát:

Giả sử, để hoàn thành một nhiệm vụ H cần thực hiện k công việc nhỏ là H_1, H_2, ..., H_k một cách liên tiếp, trong đó:

- *H_1 có thể làm bằng n_1 cách*
- *H_2 có thể làm bằng n_2 cách, sau khi đã hoàn thành công việc H_1.*
- ...
- *H_k có thể làm bằng n_k cách, sau khi đã hoàn thành công việc H_{k-1}.*

Khi đó, để thực hiện H sẽ có:

$$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k \text{ cách.}$$

Quy tắc nhân mở rộng này, có thể chứng minh bằng quy nạp toán học từ quy tắc nhân cho hai công việc.

2.2.2. Biểu diễn quy tắc nhân dưới dạng tập hợp

Quy tắc nhân thường được phát biểu bằng ngôn ngữ tập hợp như sau:

Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_m$ là các tập hữu hạn, khi đó số phần tử của tích Đề - các của các tập này bằng tích của số các phần tử của mọi tập thành phần. Để liên hệ với quy tắc nhân hãy nhớ là việc chọn một phần tử của tích Đề - các $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ được tiến hành bằng cách chọn lần lượt một phần tử của A_1 một phần tử của $A_2, \ldots$, một phần tử của A_m. Theo quy tắc nhân ta nhận được đẳng thức:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m| = |A_1| . |A_2| \ldots |A_m|.$$

3. NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

Khi hai công việc có thể được làm đồng thời, chúng ta không thể dùng quy tắc cộpng để tính số cách thực hiện nhiệm vụ gồm cả hai việc. Cộng số cách làm mỗi viêệc sẽ dẫn đến sự trùng lặp, vì những cách làm cả hai việc sẽ được tính hai lần . Để tínhh đúng số cách thực hiện nhiệm vụ này ta cộng số cách làm mỗi một trong hai việc rồi trừ đi số cách làm đồng thời cả hai việc. Đó là nguyên lý bù trừ.

Biêểu diễn dưới dạng tập hợp: Chúng ta có thể phát biểu nguyên lý bù trừ bằng ngcôn ngữ tập hợp như sau:

Cho A_1, A_2 là các tập hợp. Gọi T_1 là việc chọn một phần tử của A_1 còn T_2 là việc choọn một phần tử của A_2.

- Có $|A_1|$ cách làm việc T_1
- Có $|A_2|$ cách làm việc T_2.

Số cách làm hoặc T_1 hoặc T_2 bằng tổng số cách làm việc T_1 và số cách làm việc T_2 trừ đi số cách làm cả hai việc. Vì có $|A_1 \cup A_2|$ cách làm hoặc T_1 hoặc T_2, và có $|AA_1 \cap A_2|$ cách làm cả hai việc T_1 và T_2 nên chúng ta có:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| .$$

Đó chính là công thức đưa ra để xác định số các phần tử của hợp hai tập hợp. Nguyên lý bù trừ có thể tổng quát hoá để tìm số cách thực hiện nhiệm vụ gồm n viêệc khác nhau, hoặc là tìm số phần tử của hợp n tập hợp với n là số nguyên dương.

Định lý 1: Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các tập hữu hạn, khi đó:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \le i \le j \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Nguyên lý bù trừ cho ta công thức tính số phần tử của hợp n tập hợp với mọi n nguyên dương. Nó gồm có $2^n - 1$ số hạng.

Thí dụ 3: Lớp toán rời rạc có 25 sinh viên giỏi tin học, 13 sinh viên giỏi toán và 8 sinh viên giỏi cả toán và tin học. Hỏi trong lớp này có bao nhiêu sinh viên, nếu mỗi sinh viên hoặc giỏi toán hoặc giỏi tin học giỏi cả hai môn?

Giải

Gọi A là tập các sinh viên giỏi tin học và B là tập các sinh viên giỏi toán. Khi đó $A \cap B$ là tập các sinh viên giỏi cả toán và tin học.

Vì mỗi sinh viên trong lớp hoặc giỏi toán giỏi tin hoặc giỏi cả hai môn, nên ta suy ra số sinh viên trong lớp là $|A \cup B|$.

Do vậy:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 13 - 8 = 30$$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Sử dụng các quy tắc để thực hiện bài toán đếm phương án.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Để sử dụng quy tắc cộng trong bài toán đếm, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Phân tách các phương án thành k nhóm độc lập với nhau:

$$H_1, H_2, \dots, H_k.$$

Bước 2: Nếu:

- H_1 có n_1 cách khác nhau.
- H_2 có n_2 cách khác nhau.
- ...
- H_k có n_k cách khác nhau.

Bước 3: Khi đó, ta có tất cả:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k \text{ phương án.}$$

2. Để sử dụng quy tắc nhân trong bài toán đếm, ta thực hiện theo các bước:

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Phân tách một hành động H thành k công việc nhỏ liên tiếp:

$$H_1, H_2, \dots, H_k.$$

Bước 2: Nếu ta có:

- n_1 cách khác nhau để thực hiện H_1.
- Một khi thực hiện xong H_1, ta có n_2 cách thực hiện H_2.
- ...
- Một khi thực hiện xong $H_1, H_2, \dots, H_{k-1}$, ta có n_k cách thực hiện H_k.

Bước 3: Khi đó ta có tất cả:

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k \text{ cách để thực hiện hành động H.}$$

Ví dụ 1: Ở Việt Nam, mọi học sinh đã tốt nghiệp THPT đều có quyền dự thi vào một trường đại học (có 35 trường) hoặc một trường cao đẳng (có 25 trường) hoặc một trường trung học chuyên nghiệp (có 21 trường). Hỏi mỗi học sinh đã tốt nghiệp THPT có bao nhiêu cách chọn trường thi ?

Giải

Ta thấy ngay:

- Có 35 cách chọn trường đại học.
- Có 25 cách chọn trường cao đẳng.
- Có 21 cách chọn trường trung học chuyên nghiệp.

Và khi đã chọn thi trường đại học thì không chọn trường thi là cao đẳng và trung học chuyên nghiệp, tương tự với cao đẳng và trung học chuyên nghiệp, do đó có tất cả:

$$35 + 25 + 21 = 81 \text{ cách chọn trường thi.}$$

Chú ý: Nhiều bài toán đếm phức tạp không thể giải được nếu chỉ sử dụng hoặc quy tắc cộng hoặc quy tắc nhân. Nhưng chúng có thể giải được nếu sử dụng cả hai quy tắc này. Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ điều này.

Ví dụ 2: Trong một phiên bản của ngôn ngữ lập trình BASIC, tên một biến là một xâu chứa một hoặc hai chữ số hoặc chữ cái, trong đó không phân biệt chữ in thường và chữ in hoa. Hơn thế nữa tên biến bắt đầu bằng một chữ cái và phải khác với năm xâu hai ký tự dành riêng. Có bao nhiêu tên biến khác nhau trong phiên bản này của BASIC.

Giải

Gọi V là số các tên khác nhau trong phiên bản này của BASIC, V_1 là số các tên gồm 1 ký tự, V_2 là số các tên gồm 2 ký tự.

Khi đó theo quy tắc cộng, ta có:

$$V = V_1 + V_2.$$

Ta có ngay $V_1 = 26$, vì tên biến một ký tự thì nhất thiết phải là chữ cái.

Để tính V_2 ta thấy:

- Ký tự đầu là chữ cái (chọn một trong 26 chữ cái).
- Ký tự thứ hai có thể là chữ cái hoặc chữ số (chọn một trong 26 chữ cái và 10 chữ số). Nhưng cần phải bớt đi 5 xâu dành riêng.

Do đó:

$$V_2 = 26.36 - 5 = 931.$$

Vì vậy, có

$$V = V_1 + V_2 = 26 + 931 = 957$$

tên biến khác nhau trong phiên bản này của BASIC.

Ví dụ 3: Mỗi người sử dụng hệ thống máy tính đều có mật khẩu dài từ sáu tới tám ký tự, trong đó mỗi ký tự là một chữ hoa hay chữ số. Mỗi mật khẩu phải chứa ít nhất một chữ số. Hỏi có bao nhiêu mật khẩu ?

Giải

Gọi P là tổng số mật khẩu có thể và P_6, P_7, P_8 tương ứng là số mật khẩu dài 6, 7, 8 ký tự.

Theo quy tắc cộng ta có:

$$P = P_6 + P_7 + P_8.$$

Bây giờ chúng ta sẽ tính P_6, P_7, P_8.

- Tính trực tiếp P_6 sẽ rất khó. Để tìm P_6 dễ hơn ta tính số các xâu dài 6 ký tự là các chữ in hoa hoặc chữ số, rồi bớt đi số các xâu dài 6 ký tự là các chữ in hoa và không chứa chữ số nào. Theo quy tắc nhân số các xâu dài 6 ký tự là 36^6 và số các xâu không chứa các chữ số là 26^6. Vì vậy

$$P_6 = 36^6 - 26^6 = 1867866560.$$

- Hoàn toàn tương tự ta có:

$$P_7 = 36^7 - 26^7 = 70332353920.$$

$$P_8 = 36^8 - 26^8 = 2612282842\ 880.$$

Vậy, ta được:

$$P = P_6 + P_7 + P_8 = 2684\ 483063360.$$

Ví dụ 4: Có nhiều nhất bao nhiêu biển đăng ký xe máy nếu mỗi biển chứa một dãy gồm một chữ cái tiếp đến một chữ số khác 0 và cuối cùng là năm chữ số.

Giải

Ta nhận thấy, mỗi biển số xe máy có dạng:

Ô1	Ô2	Ô3	Ô4	Ô5	Ô6

trong đó:

- Để điền vào Ô1, có thể chọn 1 trong 26 chữ cái, do đó có 26 cách điền.
- Để điền vào Ô2, có thể chọn 1 trong 9 chữ số (đó là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), do đó có 9 cách điền.
- Để điền vào Ô3, có thể chọn 1 trong 10 chữ số (đó là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), do đó có 10 cách điền.
- Để điền vào Ô4, có thể chọn 1 trong 10 chữ số (đó là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), do đó có 10 cách điền.
- Để điền vào Ô5, có thể chọn 1 trong 10 chữ số (đó là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), do đó có 10 cách điền.
- Để điền vào Ô6, có thể chọn 1 trong 10 chữ số (đó là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), do đó có 10 cách điền.

Do đó, có tất cả:

$26 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 2340000$ biển đăng ký xe.

Ví dụ 5: Một lớp học có 33 sinh viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một tổ liên lạc gồm 3 người (lớp trưởng, lớp phó, bí thư), biết rằng sinh viên nào cũng có thể được chọn ?

Giải

Với giả thiết sinh viên nào cũng có thể được chọn, do đó:

- Có 33 cách giao chức danh lớp trưởng.
- Sau khi đã giao chức danh lớp trưởng thì mỗi sinh viên trong 32 sinh viên còn lại có thể nhận chức danh lớp phó, do đó có 32 cách giao chức danh lớp phó.
- Sau khi đã giao các chức danh lớp trưởng và lớp phó thì mỗi sinh viên trong 31 sinh viên còn lại có thể nhận chức danh bí thư, do đó có 31 cách giao chức danh bí thư.

Vậy, có tất cả:

$33 \times 32 \times 31 = 32736$ cách

giao ba chức danh lớp trưởng, lớp phó, bí thư cho 33 sinh viên.

Ví dụ 6: Có 5 con đường nối 2 thành phố X và Y, có 4 con đường nối 2 thành phố Y và Z. Muốn đi từ X đến Z thì phải qua Y.

a. Hỏi có bao nhiêu cách chọn đường đi từ X đến Z ?

b. Có bao nhiêu cách chọn đường đi và về từ X đến Z rồi về lại X bằng những con đường khác nhau?

Giải

a. Nhận xét rằng:

- Có 5 cách chọn đường đi từ X đến Y.
- Tiếp theo, có 4 cách chọn đường đi từ Y đến Z.

Do đó, có tất cả:

$5 \times 4 = 20$ cách chọn đường đi từ X đến Z qua Y.

b. Theo kết quả câu a) có 20 cách chọn đường đi.

Khi trở về:

- Từ Z đến Y chỉ còn 3 con đường để chọn, do đó có 3 cách.
- Tiếp theo, từ Y về lại X chỉ còn 4 cách chọn.

Do đó, có tất cả:

$3 \times 4 = 12$ cách chọn đường đi về từ Z đến X qua Y.

Vậy, có tất cả:

$20 \times 12 = 240$ cách

chọn đường đi và về trên tuyến X ↔ Z qua thành phố Y bằng những con đường khác nhau.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Một bé có thể mang họ cha là Lê hay họ mẹ là Đỗ, chữ lót có thể là Văn, Hữu, Hồng, Bích hoặc Đình, còn tên có thể là Nhân, Nghĩa, Trí, Đức, Ngọc hoặc Dũng. Hỏi có bao nhiêu cách để đặt tên họ cho bé.

Bài tập 2: Một nhóm sinh viên gồm n nam và n nữ. Có bao nhiêu cách xếp thành một hàng sao cho cho nam và nữ đứng xen nhau?

Bài tập 3: Trong vòng đấu loại của một cuộc thi cờ vua có 2n người tham dự. Mỗi người chơi đúng một bàn với một người khác. Chứng minh rằng có $1.3.5.7.9...(2n-1)$ cách sắp đặt.

Bài tập 4: Có tất cả 3 đường đi từ trường Lê Hồng Phong đến trường Nguyễn Thị Minh Khai và 4 đường đi từ trường Lê Hồng Phong đến trường Lê Quý Đôn. Vậy có tất cả mấy cách đi khác nhau từ trường Lê Quý Đôn đến trường Nguyễn Thị Minh Khai qua trường Lê Hồng Phong.

Bài tập 5: Quán Tản Đà có 4 món bò: nhúng dấm, lúc lắc, nướng mỡ chài, nướng lá cách; có 3 món gà: xối mỡ, quay Tứ Xuyên, rút xương và hai món cua: rang muối, rang me. Hỏi nhà văn Vương Hà có mấy cách gọi hai món lai rai.

Bài tập 6: (ĐH Y 2000). Có 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lý nam. Lập một đoàn công tác có 3 người cần có cả nam và nữ, cần có cả nhà toán học và nhà vật lý. Hỏi có bao nhiêu cách.

Bài toán 2: Sử dụng các quy tắc để thực hiện bài toán đếm số các số hình thành từ tập A.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Sử dụng quy tắc nhân để thực hiện bài toán đếm số các số gồm k chữ số hình thành từ tập A, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Một số gồm k chữ số hình thành từ tập A có dạng:

$$\overline{\alpha_1 \ldots \alpha_k}\text{, với } \alpha_i \in A,\ i = \overline{1,k} \text{ và } \alpha_1 \neq 0.$$

Bước 2: Đếm số cách chọn cho các α_i, $i = \overline{1,k}$ (không nhất thiết phải theo thứ tự), giả sử bằng n_i.

Bước 3: Khi đó, số các số gồm k chữ số phân biệt hình thành từ tập A bằng:

$$n_1.n_2\ldots n_k.$$

2. Sử dụng quy tắc cộng và quy tắc nhân để thực hiện bài toán đếm số các số hình thành từ tập A, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chia tập các số cần đếm thành các tập con H_1, H_2, ... độc lập với nhau (không giao nhau).

Bước 2: Sử dụng quy tắc nhân đếm số phần tử của các tập H_1, H_2, ..., giả sử bằng k_1, k_2, ...

Bước 3: Khi đó, số các số hình thành từ tập A bằng:

$$k_1 + k_2 + \ldots$$

Ví dụ 1: Cho tập A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

a. Có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau hình thành từ tập A.

b. Có thể lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau hình thành từ tập A và số đó chia hết cho 2.

c. Có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau hình thành từ tập A và số đó chia hết cho 3.

d. Có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau hình thành từ tập A và số đó chia hết cho 5.

Giải

a. Một số gồm 4 chữ số phân biệt hình thành từ tập A có dạng:

$$\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}\text{, với } \alpha_i \in A,\ i = \overline{1,4} \text{ và } \alpha_i \neq \alpha_j,\ i \neq j.$$

Trong đó:

- α_1 được chọn từ tập A - có 6 phần tử
  $\Rightarrow$ có 6 cách chọn.
- α_2 được chọn từ tập $A \backslash \{\alpha_1\}$ - có 5 phần tử
  $\Rightarrow$ có 5 cách chọn.
- α_3 được chọn từ tập $A \backslash \{\alpha_1, \alpha_2\}$ - có 4 phần tử
  $\Rightarrow$ có 4 cách chọn.
- α_4 được chọn từ tập $A \backslash \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ - có 3 phần tử
  $\Rightarrow$ có 3 cách chọn.

Khi đó, số các số gồm 4 chữ số phân biệt hình thành từ tập A bằng:

6.5.4.3 = 360 số.

b. Một số gồm 3 chữ số phân biệt hình thành từ tập A có dạng:

$\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, với $\alpha_i \in A$, $i = \overline{1,3}$ và $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$.

Trong đó:

- α_3 được chọn từ tập $\{2, 4, 6\}$ để số cần tìm chia hết cho 2 - có 3 phần tử
  $\Rightarrow$ có 3 cách chọn.
- α_1 được chọn từ tập $A\backslash\{\alpha_3\}$ - có 5 phần tử $\Rightarrow$ có 5 cách chọn.
- α_2 được chọn từ tập $A\backslash\{\alpha_3, \alpha_1\}$ - có 4 phần tử $\Rightarrow$ có 4 cách chọn.

Khi đó, số các số gồm 3 chữ số phân biệt hình thành từ tập A và chia hết cho 2 bằng:

3.5.4 = 60 số.

c. Một số gồm 6 chữ số phân biệt hình thành từ tập A có dạng:

$\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6}$, với $\alpha_i \in A$, $i = \overline{1,6}$ và $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$.

Nhận xét rằng, mọi số có 6 chữ số khác nhau hình thành từ tập A đều chia hết cho 3. Do đó:

- α_1 được chọn từ tập A - có 6 phần tử
  $\Rightarrow$ có 6 cách chọn.
- α_2 được chọn từ tập $A\backslash\{\alpha_1\}$ - có 5 phần tử
  $\Rightarrow$ có 5 cách chọn.
- α_3 được chọn từ tập $A\backslash\{\alpha_1, \alpha_2\}$ - có 4 phần tử
  $\Rightarrow$ có 4 cách chọn.
- α_4 được chọn từ tập $A\backslash\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ - có 3 phần tử
  $\Rightarrow$ có 3 cách chọn.
- α_5 được chọn từ tập $A\backslash\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ - có 2 phần tử
  $\Rightarrow$ có 2 cách chọn.
- α_6 được chọn từ tập $A\backslash\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ - có 1 phần tử
  $\Rightarrow$ có 1 cách chọn.

Khi đó, số các số gồm 6 chữ số phân biệt hình thành từ tập A bằng:

6.5.4.3.2.1 = 720 số.

d. Một số gồm 5 chữ số phân biệt hình thành từ tập A có dạng:

$\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5}$, với $\alpha_i \in A$, $i = \overline{1,5}$ và $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$.

Trong đó:

- α_5 phải bằng 5 để số cần tìm chia hết cho 5
  $\Rightarrow$ có 1 cách chọn.
- α_1 được chọn từ tập $A\backslash\{\alpha_5\}$ - có 5 phần tử
  $\Rightarrow$ có 5 cách chọn.
- α_2 được chọn từ tập $A\backslash\{\alpha_5, \alpha_1\}$ - có 4 phần tử
  $\Rightarrow$ có 4 cách chọn.
- α_3 được chọn từ tập $A\backslash\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5\}$ - có 3 phần tử
  $\Rightarrow$ có 3 cách chọn.
- α_4 được chọn từ tập $A\backslash\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}$ - có 2 phần tử
  $\Rightarrow$ có 2 cách chọn.

Khi đó, số các số gồm 5 chữ số phân biệt hình thành từ tập A và chia hết cho 5 bằng:

1.5.4.3.2 = 120 số.

Ví dụ 2: Cho tập A = {0, 1, 2, 3}.

a. Có thể lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số hình thành từ tập A.

b. Có thể lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau hình thành từ tập A.

Giải

a. Một số gồm 3 chữ số hình thành từ tập A có dạng:

$\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, với $\alpha_i \in A$, $i = \overline{1,3}$.

Trong đó:

- α_1 được chọn từ tập A\{0} - có 3 phần tử

  ⇒ có 3 cách chọn.

- α_2 được chọn từ tập A - có 4 phần tử

  ⇒ có 4 cách chọn.

- α_3 được chọn từ tập A - có 4 phần tử

  ⇒ có 4 cách chọn.

Khi đó, số các số gồm 3 chữ số hình thành từ tập A bằng:

3.4.4 = 48 số.

b. Một số gồm 3 chữ số phân biệt hình thành từ tập A có dạng:

$\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, với $\alpha_i \in A$, $i = \overline{1,3}$ và $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$.

Trong đó:

- α_1 được chọn từ tập A\{0} - có 3 phần tử

  ⇒ có 3 cách chọn.

- α_2 được chọn từ tập A\{α_1} - có 3 phần tử

  ⇒ có 3 cách chọn.

- α_3 được chọn từ tập A\{α_1, α_2} - có 2 phần tử

  ⇒ có 2 cách chọn.

Khi đó, số các số gồm 3 chữ số phân biệt hình thành từ tập A bằng:

3.3.2 = 18 số.

Ví dụ 3: Cho tập A = {1, 2, 3}. Có thể lập được bao nhiêu số có các chữ số phân biệt hình thành từ tập A.

Giải

Tập các số cần đếm gồm:

- Tập H_1 chứa các số có một chữ số hình thành từ A.
- Tập H_2 chứa các số có hai chữ số phân biệt hình thành từ A.
- Tập H_3 chứa các số có ba chữ số phân biệt hình thành từ A.

Ta lần lượt đếm số phần tử của các tập H_1, H_2, H_3:

a. Tập H_1 có ba số là 1, 2, 3.

b. Mỗi số thuộc tập H_2 có dạng:

$$\overline{\alpha_1\alpha_2}, \text{ với } \alpha_i \in A, i = 1, 2 \text{ và } \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

Trong đó:

- α_1 được chọn từ tập A - có 3 phần tử, suy ra:
  có 3 cách chọn.
- α_2 được chọn từ tập $A\backslash\{\alpha_1\}$ - có 2 phần tử, suy ra:
  có 2 cách chọn.

Khi đó, số các số trong tập H_2 bằng:
3.2 = 6 số.

- Mỗi số thuộc tập H_3 có dạng:

$$\overline{\beta_1\beta_2\beta_3}, \text{ với } \beta_i \in A, i = \overline{1,3} \text{ và } \beta_i \neq \beta_j \text{ với } i \neq j.$$

Trong đó:

- β_1 được chọn từ tập A - có 3 phần tử, suy ra:
  có 3 cách chọn.
- β_2 được chọn từ tập $A\backslash\{\beta_1\}$ - có 2 phần tử, suy ra:
  có 2 cách chọn.
- β_3 được chọn từ tập $A\backslash\{\beta_1, \beta_2\}$ - có 1 phần tử, suy ra:
  có 1 cách chọn.

Khi đó, số các số trong tập H_3 bằng:
3.2.1 = 6 số.

Vậy, từ tập A có thể lập được:
3 + 6 + 6 = 15 số thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Sau này, khi đã biết thêm được kiến thức về chỉnh hợp và hoán vị chúng ta có thể trình bày lời giải trên đơn giản hơn rất nhiều.

Ví dụ 4: Cho tập A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Có thể lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau hình thành từ tập A và số đó không lớn hơn 456.

Giải

Tập các số cần đếm gồm:

- Tập H_1 chứa các số có ba chữ số phân biệt hình thành từ A và có chữ số hằng trăm là 1 hoặc 2 hoặc 3.
- Tập H_2 chứa các số có ba chữ số phân biệt hình thành từ A và có chữ số hằng trăm là 4 và chữ số hàng chục khác 6.

Ta lần lượt đếm số phần tử của các tập H_1, H_2:

a. Mỗi số thuộc tập H_1 có dạng:

$$\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \text{ với } \alpha_1 \in \{1, 2, 3\}, \alpha_2, \alpha_3 \in A \text{ và } \alpha_i \neq \alpha_j \text{ với } i \neq j.$$

Trong đó:

- α_1 được chọn từ tập {1, 2, 3} - có 3 phần tử

  ⇒ có 3 cách chọn.

- α_2 được chọn từ tập $A\backslash\{\alpha_1\}$ - có 5 phần tử
  $\Rightarrow$ có 5 cách chọn.
- α_3 được chọn từ tập $A\backslash\{\alpha_1, \alpha_2\}$ - có 4 phần tử
  $\Rightarrow$ có 4 cách chọn.

Khi đó, số các số trong tập H_1 bằng:
$3.5.4 = 60$ số.

b. Mỗi số thuộc tập H_2 có dạng:

$$\overline{4\beta_2\beta_3}\text{, với } \beta_2, \beta_3 \in A,\ \beta_2 \neq 6 \text{ và } \beta_i \neq \beta_j \text{ với } i \neq j.$$

Trong đó:

- β_2 được chọn từ tập $A\backslash\{4, 6\}$ - có 4 phần tử
  $\Rightarrow$ có 4 cách chọn.
- β_3 được chọn từ tập $A\backslash\{4, \beta_2\}$ - có 4 phần tử
  $\Rightarrow$ có 4 cách chọn.

Khi đó, số các số trong tập H_2 bằng:
$4.4 = 16$ số.

Vậy, từ tập A có thể lập được:
$60 + 16 = 76$ số thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Chúng ta có thể thực hiện phép đếm trên bằng nguyên lí phần bù, theo nghĩa bài toán ngược dưới dạng:

- Đếm số các số gồm ba chữ số phân biệt hình thành từ tập A.
- Đếm các số gồm ba chữ số phân biệt hình thành từ tập A lớn hơn 456.

Từ đó, suy ra số các số gồm 3 chữ số khác nhau hình thành từ tập A và số đó không lớn hơn 456. Cụ thể:

- Số các số gồm ba chữ số phân biệt hình thành từ tập A bằng $6.5.4 = 120$ số.
- Gọi E là tập hợp các số gồm 3 chữ số khác nhau hình thành từ tập A và lớn hơn 456.
  Trước hết, các số 461, 462, 463, 465 thuộc E.
  Ngoài ra:
  - Chữ số hàng trăm phải là 5 hoặc 6, do đó có 2 cách chọn.
  - Chữ số hàng chục được chọn từ 5 chữ số còn lại, do đó có 5 cách chọn.
  - Chữ số hàng đơn vị được chọn từ 4 chữ số còn lại, do đó có 4 cách chọn.

  Do đó E có tất cả là:

  $$4 + 2.5.4 = 44 \text{ số.}$$

Suy ra số các số phải tìm là:

$$120 - 44 = 76 \text{ số.}$$

Ví dụ 5: Bao nhiêu số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 7 hoặc 11?

Giải

Gọi A số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 7, và B là tập các số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 11. Khi đó $|A \cup B|$ là tập các số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 7 hoặc 11 và $A \cap B$ là tập các số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho cả 7 và 11.

Ta biết, trong số các số nguyên không lớn hơn 1000 có

- $\lfloor 1000/7 \rfloor$ số nguyên chia hết cho 7
- $\lfloor 1000/11 \rfloor$ chia hết cho 11.
- Vì 7 và 11 là hai số nguyên tố cùng nhau nên số nguyên chia hết cho cả 7 và 11 là số nguyên chia hết cho 7.11. Số các số này là $\lfloor 1000/(7.11) \rfloor$.

Từ đó suy ra:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{7.11} \right\rfloor = 142 + 90 - 12$$

$$= 220.$$

tức là có 220 số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 7 hoặc 11.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Có bao nhiêu số chẵn, lớn hơn 5000, gồm 4 chữ số khác nhau.

Bài tập 2: Giả sử $p_1, p_2, \ldots, p_n$ là các số nguyên tố khác nhau. Hỏi có bao nhiêu ước số của số $q = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$

Bài tập 3: Có bao nhiêu số khác nhau (không được bắt đầu bằng 0), nhỏ hơn 2.10^8, chia hết cho 3, có thể viết bởi các chữ số 0, 1, 2.

Bài tập 4: Có tất cả bao nhiêu số có thể thành lập với chữ số 2, 4, 6, 8 nếu:

a. Số đó nằm từ 200 đến 600

b. Số đó gồm 3 con số khác nhau

c. Số đó gồm 3 con số không cần khác nhau.

Bài tập 5: Với 4 chữ số 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số có các chữ số phân biệt.

Bài tập 6: Với 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số phân biệt.

Bài tập 7: Từ 7 chữ số 0, 1,..., 6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau.

Bài tập 8: Cho 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Từ 5 chữ số đó có thể lập được bao nhiêu chữ số chẵn có năm chữ số sao cho trong mỗi chữ số đó mỗi chữ số trên có mặt một lần.

Bài tập 9: Có bao nhiêu số nguyên, dương với các chữ số phân biệt, nhỏ hơn 10000 ?

Bài tập 10: Cho 10 chữ số 0, 1, 2, ..., 9. Có bao nhiêu số lẻ có 6 chữ số khác nhau nhỏ hơn 600.000 xây dựng từ 10 chữ số đó.

Bài tập 11: Tìm tất cả các số tự nhiên có đúng 5 chữ số sao cho trong mỗi số đó chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước.

Bài tập 12: Hỏi từ 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập thành bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau, sao cho trong các chữ số đó có mặt chữ số 0 và 1.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC / 3056

Bài tập 13: Với 5 chữ số 1, 2, 5, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số phân biệt và thoả mãn điều kiện:

a. Là một số chẵn.

b. Là một số nhỏ hơn hoặc bằng 278.

c. Là một số chẵn và nhỏ hơn hoặc bằng 278.

Bài tập 14: Với tập E = {0, 1, 2, 3, 4, 5} có thể lập được bao nhiêu

a. Số gồm 5 chữ số phân biệt.

b. Số chẵn gồm 5 chữ số phân biệt.

c. Số gồm 5 chữ số phân biệt, trong đó có chữ số 0.

Bài tập 15: Cho tập hợp E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau đôi một lấy từ E trong mỗi trường hợp sau:

a. Là số chẵn.

b. Một trong 3 chữ số đầu tiên phải bằng 1.

Bài tập 16: Từ sáu chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau, trong đó có bao nhiêu số chia hết cho 5.

Bài tập 17: Với 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt và thoả mãn điều kiện:

a. Mỗi số nhỏ hơn 40000.

b. Mỗi số nhỏ hơn 45000.

Bài tập 18: Xét những số gồm 9 chữ số, trong đó có 5 chữ số 1 và bốn chữ số còn lại là 2, 3, 4, 5. Hỏi có bao nhiêu số như thế nếu:

a. Năm chữ số 1 được xếp kề nhau.

b. Các chữ số được xếp tuỳ ý.

Bài tập 19: Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 1000000 và:

a. Chia hết cho 2, 3 hoặc 5 ?

b. Không chia hết cho 7, 11 hoặc 13 ?

c. Chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 7 ?

Bài tập 20: Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 200 là

a. Luỹ thừa bậc hai hoặc cao hơn của số nguyên ?

b. Luỹ thừa bậc hai hoặc cao hơn của số nguyên hoặc của số nguyên tố ?

c. Không chia hết cho bình phương của một số nguyên lớn hơn 1 ?

d. Không chia hết cho lập phương của một số nguyên lớn hơn 1?

e. Không chia hết cho ít nhất ba số nguyên tố ?

Bài tập 21: Tìm số các số nguyên không vượt quá 100 không chia hết hoặc cho 5 hoặc cho 7.

Bài tập 22: Tìm các số nguyên dương không vượt quá 100 và hoặc là số lẻ hoặc là bình phương của một số nguyên.

Bài tập 23: Tìm các số nguyên không vượt quá 100 và hoặc là số lẻ hoặc là bình phương hoặc là lập phương của một số nguyên.

CHỦ ĐỀ 2

HOÁN VỊ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

***Định nghĩa**: Cho tập hợp A, gồm n phần tử (n ≥ 1). Một cách sắp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.*

***Định lí** (Số hoán vị của n phần tử): Nếu kí hiệu số hoán vị của n phần tử là P_n, thì ta có:*

$$P_n = n! = 1.2.3\ldots(n-1).n.$$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Rút gọn biểu thức.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để thực hiện việc rút gọn biểu thức chứa các toán tử hoán vị, chúng ta thường sử dụng công thức phân tích, ngoài ra trong nhiều trường hợp cần vận dụng kỹ năng đơn giản dần.

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{7!4!}{10!}\left[\frac{8!}{3!5!} - \frac{9!}{2!7!}\right].$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Tính cụ thể từng phân số, ta có:

$$\frac{7!4!}{10!} = \frac{7!1.2.3.4}{7!8.9.10} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}.$$

$$\frac{8!}{3!5!} = \frac{5!6.7.8}{6.5!} = 56.$$

$$\frac{9!}{2!7!} = \frac{7!8.9}{2.7!} = 36.$$

Suy ra:

$$A = \frac{1}{30}[56 - 36] = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$A = \frac{7!4!}{10!}\left[\frac{10!6.7}{3!7!9.10} - \frac{10!}{2!7!10}\right] = 4!\left[\frac{7}{90} - \frac{1}{20}\right] = 24\left[\frac{14-9}{180}\right] = \frac{120}{180} = \frac{2}{3}$$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{6!}{m(m+1)} \cdot \frac{(m+1)!}{4!(m-1)!}.$$

Giải

Biến đổi A về dạng:

$$A = \frac{4!.5.6}{m(m+1)} \cdot \frac{(m-1)!.m.(m+1)}{4!(m-1)!} = 30.$$

Nhận xét: Như vậy để rút gọn đẳng thức đã cho chúng ta thực hiện phép phân tích dựa trên:

$$n! = n.(n-1)...(n-k+1).(n-k)!.$$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức:

$$A_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!}.$$

Giải

Ta có nhận xét:

$$\frac{k-1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$$

suy ra:

$$A_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}.$$

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} kk!.$$

Giải

Ta có nhận xét:

$$k.k! = [(k+1)-1].k! = (k+1)! - k!$$

suy ra:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} kk! = 2! - 1! + 3! - 2! + ... + (n+1)! - n! = (n+1)! - 1.$$

Nhận xét: Như vậy để chứng minh đẳng thức đã cho chúng ta thực hiện phép phân tích dựa trên:

$$A_i = A_i^1 - A_i^2$$

và từ đó các nhân tử loại dần nhau. Cần nhớ rằng đây là phép biến đổi cơ bản mà chúng ta đã được làm quen khi tính tổng dãy số.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tính các biểu thức:

a. $I = \frac{10!+8!}{8!}$.

b. $J = \frac{7!-5!}{4!}$.

Bài tập 2: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{5!}{m(m+1)}.\frac{(m+1)!}{3!(m-1)!}.$$

Bài tập 3: Rút gọn biểu thức:

$$B = \left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right]n!.$$

Bài tập 4: Tính giá trị của biểu thức sau với $m = 101$:

$$E = \frac{6!}{(m-2)(m-3)}\left[\frac{1}{(m+1)(m-4)}.\frac{(m+1)!}{(m-5)!.5!} - \frac{(m-1)!.m}{12(m-4)!.3!}\right]$$

Bài toán 2: Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức chứa các toán tử hoán vị, chúng ta thường sử dụng một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng các phép biến đổi.

Cách 2: Sử dụng các đánh giá về bất đẳng thức.

Cách 3: Sử dụng phương pháp chứng minh qui nạp.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng:

$$\frac{n^2}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!}.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi vế phải, ta có:

$$\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} = \frac{n}{(n-1)!.n} + \frac{(n-1).n}{(n-2)!.(n-1).n} = \frac{n}{n!} + \frac{(n-1)n}{n!}$$

$$= \frac{n+(n-1)n}{n!} = \frac{n^2}{n!}, \text{ đpcm.}$$

Cách 2: Biến đổi vế phải, ta có:

$$\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} = \frac{1+n-1}{(n-1)!} = \frac{n}{(n-1)!} = \frac{n^2}{n!}, \text{ đpcm.}$$

Nhận xét: Như vậy:

1. Trong cách 1 để chứng minh đẳng thức đã cho chúng ta đã sử dụng các phép biến đổi cho toán tử giai thừa và cụ thể ở đây là:

   $n! = (n-1)!.n$

   $n! = (n-2)!.(n-1)n$

2. Trong cách 2, ta sử dụng biến đổi $(n-1)! = (n-2)!.(n-1)$ để thực hiện phép quy đồng mẫu số.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2.$$

Giải

Ta có nhận xét:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{1!} = 1 \\ \frac{1}{2!} = 1 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3!} = \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4!} < \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ \dots \\ \frac{1}{n!} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \end{array}\right\} +$$

suy ra

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 - \frac{1}{n} < 2, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng:

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n, n \in \mathbf{Z}^+.$$

Giải

Sử dụng phương pháp chứng minh qui nạp.

- Với n = 1, ta có:

$$1! > \frac{1}{e}, \text{ luôn đúng}$$

Vậy, bất đẳng thức đúng với n = 1.

- Giả sử bất đẳng thức đúng với n = k, tức là ta có:

$$k! > \left(\frac{k}{e}\right)^k, k \in \mathbf{Z}^+.$$

- Ta đi chứng minh bất đẳng thức đúng với n = k + 1, tức là chứng minh

$$(k+1)! > \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}, k \in \mathbf{Z}^+.$$

Thật vậy:

$$(k+1)! = (k+1).k! > (k+1)\left(\frac{k}{e}\right)^k = \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}.\left(\frac{k}{k+1}\right)^k.e > \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}.$$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng:

$$n! > 2^{n-1}, \text{ với } n \in \mathbb{Z}, n \geq 3.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai phương pháp sau:

Cách 1: Sử dụng phương pháp đánh giá

Ta có nhận xét:

$$\left.\begin{array}{l} 2 \leq 2 \\ 2 < 3 \\ \dots \\ 2 < n \end{array}\right\} n - 1 \text{ phần tử}$$

suy ra:

$$2^{n-1} < 2.3\dots n = 1.\ 2.3\dots n = n!, \text{ đpcm.}$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp chứng minh qui nạp

- Với $n = 3$, ta có:

$$3! > 2^{3-1} \Leftrightarrow 6 > 4, \text{ luôn đúng}$$

Vậy, bất đẳng thức đúng với $n = 3$.

- Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, tức là ta có:

$$k! > 2^{k-1}, \text{ với } k \in \mathbb{Z}, k \geq 3.$$

- Ta đi chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là chứng minh

$$(k + 1)! > 2^k, \text{ với } k \in \mathbb{Z}, k \geq 3.$$

Thật vậy:

$$(k + 1)! = (k + 1).k! > (k + 1).2^{k-1} \overset{k\geq 3}{>} 2.2^{k-1} = 2^k, \text{ đpcm.}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh rằng:

$$1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots + n.n! < (n + 1)!.$$

Bài tập 2: Chứng minh rằng:

$$n^n < (n!)^2 < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}, \text{ với } n \in \mathbb{Z}, n > 2.$$

Bài tập 3: Chứng minh rằng:

$$(n + 1)(n + 2)\dots 2n, n \in \mathbb{Z}^+$$

chia hết cho tích số $1.3.5\dots(2n - 1)$.

Bài tập 4: Chứng minh rằng:

$$P_n > \left(\frac{n}{e}\right)^n, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Bài tập 5: Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{P_k} < 2.$$

Bài tập 6: Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=1}^{n} kP_k < P_{n+1}.$$

Bài toán 3: Giải phương trình, bất phương trình và hệ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để giải phương trình, bất phương trình chứa các toán tử hoán vị, chúng ta dùng một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện việc đơn giản biểu thức hoán vị để chuyển phương trình, bất phương trình về dạng đại số quen thuộc.

Cách 2: Đánh giá thông qua giá trị cận trên hoặc cận dưới.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72, \text{ với n nguyên, dương.}$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{(n+1).n.(n-1)!}{(n-1)!} = 72 \Leftrightarrow (n+1)n = 72 \Leftrightarrow n^2 + n - 72 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -9 \text{ loại} \\ n = 8 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có nghiệm $n = 8$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình:

$$3 < n! + (n+1)! < 33.$$

Giải

Ta có:

- Với $n = 1$ thì $n! + (n+1)! = 3$.
- Với $n = 2$ thì $n! + (n+1)! = 8$.
- Với $n = 3$ thì $n! + (n+1)! = 30$.
- Với $n = 4$ thì $n! + (n+1)! = 144$.

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $n = 2$ và $n = 3$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a. $\frac{n!}{20n} = (n-2)!$.

b. $P_2x^2 - P_3x = 8$.

c. $\frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{(n-1)!} = 3$.

Bài tập 2: Giải phương trình:

$$\frac{n! - (n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}.$$

Bài tập 3: Giải các bất phương trình sau:

a. $n! < 999$.

b. $n^2 + \dfrac{n!}{(n-2)!} \le 10$.

Bài tập 4: Giải bất phương trình:

$$\frac{1}{n-2}\left[\frac{5}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(n-1)!4!} - \frac{n(n-1)!}{12(n-3)(n-4)!2!}\right] \le 5, \text{ với } n \in \mathbb{N} \text{ và } n \ge 4.$$

Bài toán 4: Thực hiện bài toán đếm

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng hoán vị của n phần tử, chúng ta thường dựa trên các dấu hiệu đặc trưng sau:

- Tất cả n phần tử đều có mặt.
- Mỗi phần tử chỉ xuất hiện một lần.
- Có phân biệt thứ tự giữa các phần tử.

Ví dụ 1: Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

a. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số gồm có 9 chữ số khác nhau ?

b. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số gồm có 9 chữ số khác nhau và chia hết cho 5 ?

c. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm có 9 chữ số khác nhau ?

Giải

Một số 9 chữ số phân biệt được ký hiệu:

$$\alpha = \overline{a_1a_2...a_9}\text{ , với } a_i \in E\text{ , } i = \overline{1,9} \text{ và } a_i \ne a_j,\ i \ne j.$$

a. Ta có ngay $a_1, a_2, \ldots, a_9$ là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ A, do đó nó là một hoán vị của 9 phần tử. Vậy, từ A có thể lập được:

$P_9 = 9! = 362880$ số thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Số α chia hết cho 5, do đó:

- $a_9 = 5$, tức là có 1 cách chọn.
- $a_1, a_2, \ldots, a_8$ là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $A\backslash\{5\}$ do đó nó là một hoán vị của 8 phần tử, do đó có P_8 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, số các số gồm 9 chữ số phân biệt và chia hết cho 5 hình thành từ tập A, bằng:

$1.P_8 = 40320$ số.

c. Số α là số chẵn, do đó:

- $a_9 \in \{2, 4, 6, 8\}$, tức là có 4 cách chọn.
- $a_1, a_2, \ldots, a_8$ là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $A\backslash\{a_9\}$ do đó nó là một hoán vị của 8 phần tử, do đó có P_8 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, số các số chẵn gồm 9 chữ số phân biệt hình thành từ tập A, bằng:

$4.P_8 = 161280$ số.

Ví dụ 2: Cho tập E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

a. Có bao nhiêu số gồm 7 chữ số phân biệt hình thành từ tập E ?

b. Có bao nhiêu số gồm 7 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, trong đó các chữ số 3, 4, 5 đứng cạnh nhau ?

c. Có bao nhiêu số gồm 7 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, bắt đầu bằng 123 ??

Giải

a. Mỗi số gồm 7 chữ số phân biệt hình thành từ tập E ứng với chỉ một hoán vị của 7 phần tử của tập E, và ngược lại.

Vậy số các số phải tìm bằng:

$P_7 = 7! = 5040$ số.

b. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Các số 3, 4, 5 đứng cạnh nhau theo thứ tự đó.

Giả sử $\alpha = (3, 4, 5)$ là bộ ba chữ số 3, 4, 5 đứng cạnh nhau theo thứ tự đó.

Mỗi số gồm 7 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, trong đó các chữ số 3, 4, 5 đứng cạnh nhau (theo thứ tự đó) ứng với chỉ một hoán vị của 5 phần tử của tập F = {1, 2, α, 6, 7}, và ngược lại.

Vậy số các số phải tìm bằng:

$P_5 = 5! = 120$ số.

Trường hợp 2: Các số 3, 4, 5 đứng cạnh nhau theo thứ tự bất kỳ.

Ta biết rằng có 3! cách chọn các bộ 3 chữ số (3, 4, 5) đứng cạnh nhau và theo thứ tự bất kỳ.

Vậy số các số phải tìm bằng:

$3!.P_5 = 720$ số.

c. Mỗi số gồm 7 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, bắt đầu bằng 123, ứng với chỉ một hoán vị của 4 chữ số (4, 5, 6, 7).

Vậy số các số phải tìm bằng:

$P_4 = 4! = 24$ số.

Ví dụ 3: Có n quả cầu trắng và n quả cầu đen, đánh dấu theo các số 1, 2, 3,..., n. Có bao nhiêu cách sắp xếp các quả cầu này thành dãy sao cho 2 quả cầu cùng màu không nằm cạnh nhau ?

Giải

Ta thấy ngay, có 2 khả năng:

- Các quả cầu trắng chiếm các vị trí lẻ, còn các quả cầu đen chiếm các vị trí chẵn.
- Các quả cầu trắng chiếm các vị trí chẵn, còn các quả cầu đen chiếm vị trí lẻ.

Trong mỗi trường hợp: có n! cách sắp xếp các quả cầu trắng (hoặc đen) nghĩa là có $(n!)^2$ cách sắp xếp.

Vậy số cách sắp xếp các quả cầu sao cho 2 quả cầu cùng màu không nằm cạnh nhau là $2(n!)^2$.

Chú ý: Để tính tổng của các hoán vị phương pháp được minh hoạ thông qua ví dụ sau:

Ví dụ 4: Xét mọi hoán vị của 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Tính tổng S của tất cả các số tạo bởi hoán vị này.

Giải

Từ 6 số đã cho, ta có thể lập được:

$P_6 = 6! = 720$ số gồm 6 chữ số khác nhau.

Nhận xét rằng "*Ứng với mỗi số N thuộc tập hợp này, luôn tồn tại một và chỉ một số N' sao cho tổng N + N' = 777777* ". Do đó, có tất cả

$\frac{720}{2} = 360$ cặp số (N, N') mà tổng bằng 777777.

Vậy, tổng S của tất cả các số tạo bởi hoán vị đã cho bằng:

$S = 777777 \times 360 = 279999720$.

Nhận xét: Trong lời giải của ví dụ trên, chúng ta đã sử dụng tương ứng 1 – 1 để tạo ra các cặp số có tổng không đổi (thí dụ số 123456 sẽ ứng với số 654321), từ đó tính được tổng các hoán vị.

Ví dụ 5: Cho tập A = {3, 4, 5, 6, 7}.

a. Từ A có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt ?

b. Tính tổng S của tất cả các số được tạo ra trong câu a).

Giải

a. Mỗi số gồm 5 chữ số phân biệt hình thành từ tập A ứng với chỉ một hoán vị của 5 phần tử của tập A, và ngược lại.

Vậy, số các số phải tìm bằng:

$P_5 = 5! = 720$ số.

b. Nhận xét rằng "*Ứng với mỗi số N thuộc tập hợp này, luôn tồn tại một và chỉ một số N' sao cho tổng N + N' = 111110* ". Do đó, có tất cả

$\frac{720}{2} = 360$ cặp số (N, N') mà tổng bằng 111110.

Vậy, tổng S của tất cả các số tạo bởi hoán vị đã cho bằng:

$S = 111110 \times 360 = 39999600$.

Chú ý: Để minh hoạ cho *hoán vị tròn*, ta phát biểu bài toán:

"*Mời n người khách ngồi vào xung quanh một bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi ?*"

Khi đó:

- Mời người khách danh dự vào chỗ danh dự.
- Còn lại (n – 1) người khách ngồi tuỳ ý vào (n – 1) vị trí còn lại.

Vậy có:

(n – 1)! cách sắp xếp.

Ví dụ 6:

a. Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 người ngồi quanh một bàn hình chữ U ?

b. Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 người ngồi quanh một bàn tròn ?

Giải

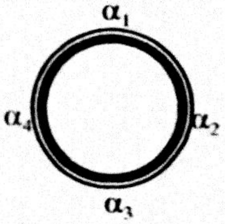
Đặt $E = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ là tập hợp 4 người.

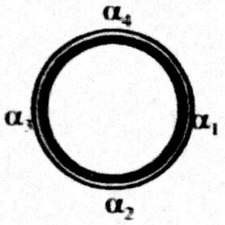
a. Với bàn hình chữ U, có thể phân biệt vị trí chỗ ngồi bằng cách đánh số thứ tự. Khi đó mỗi cách sắp xếp ứng với chỉ một bộ 4 phần tử của tập E

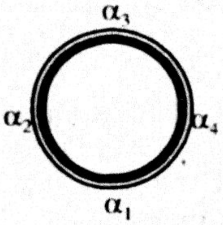
Vậy số cách sắp xếp bằng:

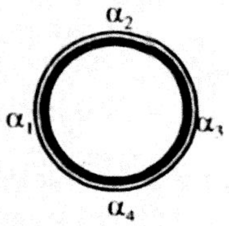
$$P_4 = 4! = 24 \text{ cách.}$$

b. Với một bàn tròn, người ta không phân biệt vị trí chỗ ngồi, có nghĩa là các kết quả chỉ do đổi chỗ vòng tròn, sẽ không coi là khác nhau. Ví dụ 4 cách sắp xếp sau đây được coi là một cách sắp xếp:









Vậy, số cách sắp xếp bằng:

$$\frac{P_4}{4} = 6 \text{ cách.}$$

Ví dụ 7: Tìm số hoán vị của n phần tử trong đó có 2 phần tử a và b không đứng cạnh nhau.

Giải

Trước hết, ta có số hoán vị của n phần tử là:

$$P_n = n!$$

Trong đó kể cả số hoán vị mà 2 phần tử a và b đứng cạnh nhau.

Ta đi xem có bao nhiêu cách chọn cặp (a, b) đứng cạnh nhau và dễ thấy rằng:

- Với b đứng bên phải a, khi đó ta có thể chọn cho a tất cả (n – 1) vị trí từ vị trí đầu tiên đến vị trí thứ (n – 1).
- Với a đứng bên phải b, cũng có (n – 1) cách chọn.

Do đó có 2(n – 1) cách chọn cặp (a, b) đứng cạnh nhau. Ứng với mỗi trường hợp chọn cặp (a, b), ta có (n – 2)! cách sắp xếp (n – 2) vật còn lại vào (n – 2) vị trí còn lại. Do đó, có tất cả:

$$2(n-1)(n-2)! = 2(n-1)!$$

hoán vị n vật mà trong đó có 2 phần tử a và b đứng cạnh nhau.

Suy ra, số hoán vị của n phần tử trong đó 2 phần tử a và b không đứng cạnh nhau là:

$$n! - 2(n-1)! = (n-2)(n-1)!.$$

Áp dụng: Số các số gồm 5 chữ số khác nhau trong đó 2 chữ số 1 và 2 không đứng cạnh nhau là:

$$5! - 2.4! = 120 - 48 = 72 \text{ số.}$$

Chú ý: Để minh hoạ cho *hoán vị có lặp lại*, ta xét:

Có n vật sắp xếp vào n vị trí và trong số n vật này có:

- n_1 vật giống nhau,
- n_2 vật khác giống nhau,

....

- n_k vật khác lại giống nhau.

Số cách sắp xếp n vật nào vào n chỗ là:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Ví dụ 8: Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 ta có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng 1 lần?

Giải

Đây là số hoán vị 8 vật trong đó có 3 vật giống nhau (3 chữ số 1). Do đó, số các số thoả mãn là:

$$\frac{8!}{3!}.$$

Trong đó, kể cả những số có chữ số 0 tận cùng bên trái. Số các số này có thể xem là số hoán vị 7 vật có 3 vật được lặp lại:

$$\frac{7!}{3!}.$$

Do đó, số các số gồm 8 chữ số được viết từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, mỗi chữ số còn lại có mặt đúng 1 lần là:

$$\frac{8!}{3!}-\frac{7!}{3!}=\frac{8.7!-7!}{3!}=\frac{7.7!}{3!}=7.4.5.6.7=5880 \text{ số.}$$

Ví dụ 9: Với 6 mẫu tự của BENZEN, có thể viết được bao nhiêu từ gồm 6 mẫu tự ?

Giải

Trong 6 mẫu tự của BENZEN, có 2 mẫu ký tự "E", 2 mẫu tự "N". Do đó số từ phải tìm là:

$$\frac{6!}{2!2!}=180 \text{ từ.}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Có tất cả bao nhiêu hoán vị của tập hợp {a, b, c, d, e, f) với phần tử cuối cùng bằng a.

Bài tập 2: Có sáu ứng cử viên chức thống đốc bang. Tính số cách in tên của các ứng cử viên lên phiếu bầu cử.

Bài tập 3: Có bao nhiêu cách xếp 6 người ngồi xung quanh một bàn tròn, hai cách ngồi được xem là như nhau nếu cách này có thể nhận được từ cách kia bằng cách quay bàn đi một góc nào đó ?

Bài tập 4: Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, xét tập hợp E các số gồm 7 chữ số khác nhau viết từ các chữ số đã cho. Chứng minh rằng tổng tất cả các số của tập E là chia hết cho 9.

Bài tập 5: Một người chồng và một người vợ mời 2n người khách dự tiệc. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi sao cho chồng luôn luôn ngồi ở vị trí đối diện với người vợ ? Áp dụng với n = 12.

Bài tập 6: Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6:

a. Lập được bao nhiêu số có 10 chữ số mà trong mỗi số, chữ số 5 có mặt đúng 4 lần, các chữ số khác, mỗi chữ số có mặt đúng 1 lần ?

b. Lập được bao nhiêu số có 10 chữ số mà trong mỗi số chữ số 2 có mặt đúng 3 lần, chữ số 4 có mặt đúng 2 lần và các chữ số khác, mỗi chữ số có mặt đúng 1 lần ?

CHỦ ĐỀ 3

CHỈNH HỢP VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

***Định nghĩa**: Cho tập hợp A gồm n phần tử. Một bộ gồm k ($1 \le k \le n$) phần tử sắp thứ tự của tập hợp A được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A.*

***Định lí** (Số chỉnh hợp chập k của n phần tử): Nếu kí hiệu số chỉnh hợp chập k của n phần tử là A_n^p, thì ta có:*

$$A_n^k = n.(n - 1)\ldots(n - k + 1).$$

***Chú ý**:*

1. Ta có thể viết A_n^k theo cách khác:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2. Nếu k = n thì:

$$A_n^n = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n.$$

Như vậy, một chỉnh hợp n chập n được gọi là một hoán vị của n phần tử.

Từ đó, suy ra:

$$A_n^n = A_n^k . A_{n-k}^{n-k}, \text{ với mọi } 1 \le k \le n.$$

Kết quả này được phát biểu như sau: " *Số các hoán vị của n phần tử phâm biệt bằng số các chỉnh hợp n chập r của các phần tử đó, nhân với số các hoán vị của (n – r) phần tử còn lại* ".

3. Bộ k phần tử có kể thứ tự được hiểu như sau: giả sử a, b là hai bộ k phần tử của tập E

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \text{ và } b = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$$

- a, b được coi là có kể thứ tự nếu $a = b \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i = \overline{1,k}$.
- a, b được coi là không kể thứ tự nếu $a = b \Leftrightarrow$ mỗi a_i trùng với một b_j nào đó $i, j = \overline{1,k}$.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Rút gọn biểu thức.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để thực hiện việc rút gọn biểu thức chứa các toán tử chỉnh hợp, chúng ta thường sử dụng công thức khai triển.

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4}, \text{với } 6 < n \in \mathbf{N}.$$

Giải

Ta có:

$$A = \frac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$= (n-4)(n-5) + n - 4 = (n-4)^2.$$

Chú ý: Phương pháp rút gọn biểu thức cho phép chúng ta có thể tính được giá trị của biểu thức, để minh hoạ chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: Tính giá trị biểu thức:

$$M = \frac{A_{49}^{12} + A_{49}^{11}}{A_{49}^{10}} - \frac{A_{17}^{10} + A_{17}^{9}}{A_{17}^{8}}.$$

Giải

Ta có:

$$M = \frac{A_{49}^{12} + A_{49}^{11}}{A_{49}^{10}} - \frac{A_{17}^{10} + A_{17}^{9}}{A_{17}^{8}} = \frac{\left(\frac{49!}{37!} + \frac{49!}{38!}\right)}{\frac{49!}{39!}} - \frac{\left(\frac{17!}{7!} + \frac{17!}{8!}\right)}{\frac{17!}{9!}}$$

$$= \left(\frac{39!}{37!} + \frac{39!}{38!}\right) - \left(\frac{9!}{7!} + \frac{9!}{8!}\right) = (39.38 + 39) - (9.8 + 9) = 1440.$$

Ví dụ 3: Tính giá trị biểu thức:

$$S = P_1A_2^1 + P_2A_3^2 + P_3A_4^3 + P_4A_5^4 + P_5A_6^5 - P_1P_2P_3P_4P_5$$

Giải

Ta có:

$$S = 1!\frac{2!}{1!} + 2!\frac{3!}{1!} + 3!\frac{4!}{1!} + 4!\frac{5!}{1!} + 5!\frac{6!}{1!} - 1!2!3!4!5!$$

$$= 1!2! + 2!3! + 3!4! + 4!5! + 5!6! - 1!2!3!4!5!$$

$$= 2 + 12 + 144 + 2880 + 86400 - 34560 = 54878.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm giá trị của các đại lượng sau:

a. A_6^3. b. A_5^4. c. A_8^5.

Bài tập 2: Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{A_5^3 - A_5^2}{P_2} + \frac{P_5}{P_2}.$$

Bài tập 3: Tính giá trị của biểu thức:

$$S=\left(\frac{P_5}{A_5^4}+\frac{P_4}{A_5^3}+\frac{P_3}{A_5^2}+\frac{P_2}{A_5^1}\right)A_5^2.$$

Bài tập 4: Rút gọn biểu thức:

$$M=\frac{\left(\frac{P_5}{A_5^4}+\frac{P_4}{A_5^3}+\frac{P_3}{A_5^2}+\frac{P_2}{A_5^1}\right)A_5^2}{(P_3-2P_2)}.$$

Bài toán 2: Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức chứa các toán tử chỉnh hợp, chúng ta thường sử dụng công thức khai triển.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng:

$$A_{n+k}^{n+2}+A_{n+k}^{n+1}=k^2A_{n+k}^{n}.$$

Giải

Ta có:

$$A_{n+k}^{n+2}+A_{n+k}^{n+1}=\frac{(n+k)!}{(k-2)!}+\frac{(n+k)!}{(k-1)!}=\frac{(n+k)!}{(k-2)!}(1+\frac{1}{k-1})$$

$$=\frac{k(n+k)!}{(k-1)(k-2)!}=\frac{k^2(n+k)!}{k(k-1)(k-2)!}=\frac{k^2(n+k)!}{k!}$$

$$=k^2A_{n+k}^{n}, \text{ đpcm.}$$

* * *

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh rằng:

$$A_n^k=A_{n-1}^k+kA_{n-1}^{k-1}.$$

Bài tập 2: Chứng minh rằng:

$$P_kA_{n+1}^2A_{n+3}^2A_{n+5}^2=nk!A_{n+5}^5.$$

Bài toán 3: Giải phương trình, bất phương trình và hệ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để giải phương trình, bất phương trình chứa các toán tử chỉnh hợp, chúng ta chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện việc đơn giản biểu thức để chuyển phương trình, bất phương trình về dạng đại số quen thuộc.

Cách 2: Đánh giá thông qua giá trị cận trên hoặc cận dưới.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a. $A_x^2 = 12$. b. $A_x^3 = 24$.

Giải

a. Điều kiện $2 \le x \in \mathbf{N}$. (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$x(x-1) - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x = 4.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 4$.

b. Điều kiện $3 \le x \in \mathbf{N}$. (**)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$x(x-1)(x-2) - 24 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2 + x + 6) = 0 \overset{(**)}{\Leftrightarrow} x = 4.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 4$.

Nhận xét: Như vậy, thông qua lời giải của ví dụ trên chúng ta thấy ngay việc thiết lập điều kiện cho ẩn trong phương trình là rất quan trọng, nó giúp chúng ta loại bỏ được các nghiệm ngoại lai. Ngoài ra trong nhiều trường hợp nó còn giúp chúng ta thực hiện phép biến đổi nhanh hơn, ví dụ sau sẽ minh họa nhận định này.

Ví dụ 2: Tìm n nguyên, dương biết rằng:

a. $A_n^3 = 20n$. b. $A_n^5 = 18A_{n-2}^4$.

Giải

a. Ta có:

$$A_n^3 = 20n \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 20n \Leftrightarrow \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)!}{(n-3)!} = 20n$$

$$\xleftrightarrow{n \in N^+} n^2 - 3n - 18 = 0 \xleftrightarrow{n \in N^+} n = 6.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $n = 6$.

b. Ta có:

$$A_n^5 = 18A_{n-2}^4 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-5)!} = 18.\frac{(n-2)!}{(n-6)!} \Leftrightarrow \frac{n.(n-1)}{n-5} = 18$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 19n + 90 = 0 \Leftrightarrow n = 9 \vee n = 10.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $n = 9 \vee n = 10$.

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$\frac{A_{x+1}^{y+1}.P_{x-y}}{P_{x-1}} = 72.$$

Giải

Điều kiện $y < x \in \mathbf{N}$. (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\frac{(x+1)!}{(x-y)!}.(x-y)!}{(x-1)!} = 72 \Leftrightarrow (x+1)x = 72 \Leftrightarrow x^2 + x - 72 = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x = 8.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 8$ và $7 \ge y \in \mathbf{N}$.

Ví dụ 4: Giải bất phương trình:

$$\frac{A_{n+4}^{4}}{(n+2)!} < \frac{15}{(n-1)!}.$$

Giải

Điều kiện $n \in \mathbf{N}$. (*)

Ta có:

$$A_{n+4}^{4} = (n+4)(n+3)(n+2)(n+1)$$
$$(n+2)! = (n-1)!\,n(n+1)(n+2)$$

suy ra:

$$\frac{A_{n+4}^{4}}{(n+2)!} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{(n-1)!\,n(n+1)(n+2)} = \frac{(n+3)(n+4)}{(n-1)!\,n}$$

Khi đó, bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{(n+3)(n+4)}{(n-1)!.n} < \frac{15}{(n-1)!} \Leftrightarrow (n+3)(n+4) < 15n$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 8n + 12 < 0 \Leftrightarrow 2 < n < 6 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} n = 3 \\ n = 4. \\ n = 5 \end{array}\right.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm n = 3, n = 4 và n = 5.

Ví dụ 5: Tìm $n \in \mathbf{N}$ sao cho:

$$P_{n+5} = 240\, A_{n+3}^{k+3}.P_{n-k}.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} n+3 \ge k+3 \\ 0 \le n-k \in N \end{cases} \Leftrightarrow n \ge k \in \mathbf{N}. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(n+5)! = 240\frac{(n+3)!}{[n+3-(k+3)]!}(n-k)!$$

$$\Leftrightarrow (n+5)! = 240(n+3)! \Leftrightarrow (n+5)(n+4) - 240 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 9n - 220 = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} n = 11.$$

Vậy, với n = 11 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 6: Tìm $n \in \mathbf{N}$ sao cho:

$$P_{n+5} = 15\, A^{k}_{n+1}.P_{n+4-k}.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} n+1 \ge k \\ 0 \le n+4-k \in N \end{cases} \Leftrightarrow n+1 \ge k \in \mathbf{N}. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(n+5)! = 15\frac{(n+4)!}{(n+4-k)!}(n+4-k)! \Leftrightarrow (n+5)! = 15(n+4)!$$

$$\Leftrightarrow n+5 = 15 \Leftrightarrow n = 10.$$

Vậy, với n = 10 thoả mãn điều kiện đầu bài.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm n nguyên, dương biết rằng:

$$P_{n+3} = 720A_n^5P_{n-5}.$$

Bài tập 2: Giải phương trình:

$$2A_x^2 + 50 = A_{2x}^2,\ \text{với } n \in \mathbb{N}.$$

Bài tập 3: (ĐHQG HN D – 2001) Giải phương trình:

$$P_xA_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x).$$

Bài tập 4: Giải các phương trình:

a. $A_n^3 + 5A_n^2 = 2(n+15)$.

b. $A_n^3 + 3A_n^2 = \frac{1}{2}P_{n+1}$.

Bài tập 5: Tìm n nguyên, dương biết rằng:

$$\frac{P_{n+5}}{A_{n+3}^{k+3}P_{n-k}} = 240.$$

Bài tập 6: Giải bất phương trình:

$$\frac{A_{n+1}^1}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_{n-1}} < 0.$$

Bài tập 7: Giải bất phương trình:

$$\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \frac{15}{(n-1)!}.$$

Bài tập 8: Tìm miền giá trị của hàm số:

$$f(x) = A_{x-3}^{7-x}.$$

Bài toán 4: Thực hiện bài toán đếm

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng chỉnh hợp chập k của n phần tử, chúng ta thường dựa trên các dấu hiệu đặc trưng sau:

- Phải chọn k phần tử từ n phần tử cho trước.
- Có phân biệt thứ tự giữa k phần tử được chọn.

Ví dụ 1: Cho tập A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau ?

Giải

Một số gồm 5 chữ số phân biệt hình thành từ tập A có dạng:

$$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5},\ \text{với } a_i \in A,\ i = \overline{1,5} \text{ và } \alpha_i \neq \alpha_j,\ i \neq j.$$

Để số tìm được là số chẵn, điều kiện là $a_5 \in \{0, 2, 4\}$. Ta đi xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu $a_5 = 0$ – có 1 cách chọn.

Khi đó, mỗi bộ (a_1, a_2, a_3, a_4) ứng với một chỉnh hợp chập 4 của các phần tử của tập $A\backslash\{0\}$ – có 5 phần tử.

$\Rightarrow$ có A_5^4 cách chọn.

Như vậy, trong khả năng này, ta được $1.A_5^4$ số.

Khả năng 2: Nếu $a_5 \in \{2, 4\}$ – có 2 cách chọn.

Tiếp theo:

- a_1 được chọn từ tập $A\backslash\{0, a_5\}$ - có 4 phần tử

  $\Rightarrow$ có 4 cách chọn.
- Mỗi bộ (a_2, a_3, a_4) ứng với một chỉnh hợp chập 3 của các phần tử của tập $A\backslash\{a_5, a_1\}$ – có 4 phần tử.

  $\Rightarrow$ có A_4^3 cách chọn.

Như vậy, trong khả năng này, ta được $2.4.A_4^3$ số.

Khi đó, số các số chẵn gồm 5 chữ số phân biệt hình thành từ tập A bằng:

$1.A_5^4 + 2.4.A_4^3 = 120 + 192 = 312$ số.

Ví dụ 2: Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau và mỗi số chứa chữ số 5 ? Trong các số đó, có bao nhiêu số không chia hết cho 5 ?

Giải

Một số gồm 6 chữ số phân biệt hình thành từ tập A có dạng:

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, với $a_i \in A$, $i = \overline{1,6}$ và $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$.

Để số tìm được phải có mặt chữ số 5, ta thấy:

- $5 \in \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ – có 6 cách chọn.
- Tiếp theo, mỗi bộ số dành cho năm vị trí còn lại ứng với một chỉnh hợp chập 5 của các phần tử của tập $A\backslash\{5\}$ – có 8 phần tử.

  $\Rightarrow$ có A_8^5 cách chọn.

Như vậy, ta được:

$6.A_8^5 = 40320$ số.

Trong các số trên, những số chia hết cho 5 khi $a_6 = 5$, tức là ta có A_8^5 số.

Vậy, số các số tìm thấy không chia hết cho 5 là:

$6A_8^5 - A_8^5 = 5A_8^5 = 33600$ số.

Chú ý: Tiếp theo, chúng ta sẽ minh hoạ thêm một ví dụ vẫn với yêu cầu như trên. Tuy nhiên, trong trường hợp này tập A có chứa số 0.

Ví dụ 3: Cho tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau và trong đó phải có mặt chữ số 5 ?

Giải

Một số gồm 5 chữ số phân biệt hình thành từ tập A có dạng:

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, với $a_i \in A$, $i = \overline{1,5}$ và $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$.

Để số tìm được phải có mặt chữ số 5, ta đi xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu $a_1 = 5$ – có 1 cách chọn.

Khi đó, mỗi bộ (a_2, a_3, a_4, a_5) ứng với một chỉnh hợp chập 4 của các phần tử của tập $A\backslash\{5\}$ – có 6 phần tử.

$\Rightarrow$ có A_6^4 cách chọn.

Như vậy, trong khả năng này, ta được $1.\ A_6^4$ số.

Khả năng 2: Nếu $5 \in \{a_2, a_3, a_4, a_5\}$ – có 4 cách chọn.

Tiếp theo:

- a_1 được chọn từ tập $A\backslash\{0, 5\}$ - có 5 phần tử

  $\Rightarrow$ có 5 cách chọn.

- Mỗi bộ số dành cho ba vị trí còn lại ứng với một chỉnh hợp chập 3 của các phần tử của tập $A\backslash\{5, a_1\}$ – có 5 phần tử.

  $\Rightarrow$ có A_5^3 cách chọn.

Như vậy, trong khả năng này, ta được $4.5.\ A_5^3$ số.

Khi đó, số các số gồm 5 chữ số phân biệt trong đó có chữ số 5 hình thành từ tập A bằng:

$$1.\ A_6^4 + 4.5.\ A_5^3 = 6.5.4.3 + 20.5.4.3 = 1560 \text{ số}.$$

Chú ý: Khi đã nắm bắt được bản chất của vấn đề chúng ta có thể trình bày một bài toán đếm theo những lập luận đơn giản hơn.

Ví dụ 4: Cho tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

a. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau mà mỗi số luôn có mặt hai chữ số 1 và 7 ?

b. Trong các số tìm được ở câu a) có bao nhiêu số mà hai chữ số 1 và 7 đứng kề nhau, chữ số 1 bên trái chữ số 7 ?

Giải

Một số gồm 5 chữ số phân biệt hình thành từ tập A có dạng:

$$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}, \text{ với } a_i \in A,\ i = \overline{1,5} \text{ và } \alpha_i \neq \alpha_j,\ i \neq j.$$

a. Nhận xét rằng:

- Có A_5^2 cách chọn chữ số 1 và chữ số 7 vào 5 vị trí.
- Có 5 cách chọn chữ số tận cùng bên trái (loại các chữ số 0, 1 và 7).
- Có A_5^2 cách chọn 2 trong 5 chữ số còn lại vào 2 vị trí còn lại.

Do đó, số các số phải tìm là:

$$A_5^2 .\ 5.\ A_5^2 = 4.5.5.20 = 2000 \text{ số}.$$

b. Nhận xét rằng "*Số cách chọn 2 chữ số 1 và 7 đứng kề nhau, mà chữ số 1 đứng bên trái chữ số 7, trong 1 dãy có 5 vị trí là 4 cách* ".

Ta sẽ xét 2 khả năng sau:

Khả năng 1: Chữ số 1 đứng tận cùng bên trái (hàng chục ngàn) lúc đó chữ số 7 sẽ đứng ở hàng ngàn.

Mỗi bộ số dành cho ba vị trí còn lại ứng với một chỉnh hợp chập 3 của các phần tử của tập $A\backslash\{1, 7\}$ – có 6 phần tử.

$\Rightarrow$ có A_6^3 cách chọn.

Như vậy, trong khả năng này, ta được $1.A_6^3$ số.

Khả năng 2: Chữ số 1 đứng ở vị trí khác, tức là có thể ở vị trí hàng ngàn, hàng trăm, hàng chục – có 3 cách chọn.

Tiếp theo:

- a_1 được chọn từ tập $A\backslash\{0, 1, 5\}$ - có 5 phần tử

  $\Rightarrow$ có 5 cách chọn.
- Mỗi bộ số dành cho hai vị trí còn lại ứng với một chỉnh hợp chập 2 của các phần tử của tập $A\backslash\{1, 7, a_1\}$ – có 5 phần tử.

  $\Rightarrow$ có A_5^2 cách chọn.

Như vậy, trong khả năng này, ta được $3.5.A_5^2$ số.

Khi đó, số các số cần tìm bằng:

$$1.A_6^3 + 3.5.A_5^2 = 420 \text{ số.}$$

Ví dụ 5: Cho 7 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

a. Có bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau được viết từ các chữ số đã cho ?

b. Trong các số đó có bao nhiêu số luôn luôn có mặt chữ số 7?

c. Trong các số đó có bao nhiêu số luôn luôn có mặt chữ số 7 và chữ số hàng ngàn là chữ số 1 ?

Giải

a. Một số gồm 4 chữ số phân biệt hình thành từ tập A có dạng:

$$\overline{a_1a_2a_3a_4}\text{, với } a_i \in A,\ i = \overline{1,4} \text{ và } \alpha_i \neq \alpha_j,\ i \neq j.$$

Ta thấy ngay, mỗi số gồm 4 chữ số phân biệt hình thành từ tập A ứng với một chỉnh hợp chập 4 của 7 phần tử

Do đó, từ tập A có thể lập được:

$$A_7^4 = 7.6.5.4 = 840 \text{ số gồm 4 chữ số phân biệt.}$$

b. Để số tìm được phải có mặt chữ số 7, ta thấy:

- $7 \in \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ – có 4 cách chọn.
- Tiếp theo, mỗi bộ số dành cho ba vị trí còn lại ứng với một chỉnh hợp chập 3 của các phần tử của tập $A\backslash\{7\}$ – có 6 phần tử.

  $\Rightarrow$ có A_6^3 cách chọn.

Như vậy, ta được:

$$4.A_6^3 = 480 \text{ số.}$$

c. Để số tìm được có chữ số hàng ngàn là chữ số 1 và phải có mặt chữ số 7, ta thấy:

- $a_1 = 1$ – có 1 cách chọn.
- $7 \in \{a_2, a_3, a_4\}$ – có 3 cách chọn.
- Tiếp theo, mỗi bộ số dành cho hai vị trí còn lại ứng với một chỉnh hợp chập 2 của các phần tử của tập $A\backslash\{1, 7\}$ – có 5 phần tử.

  $\Rightarrow$ có A_5^2 cách chọn.

Như vậy, ta được:

$$1.3.A_5^2 = 60 \text{ số.}$$

Ví dụ 6: Có bao nhiêu cách chọn bốn cầu thủ khác nhau trong mười cầu thủ của đội bóng quần vợt để chơi bốn trận đấu đơn, các trận đấu là có thứ tự ?

Giải

Mỗi cách chọn có thứ tự bốn cầu thủ của đội bóng là một chỉnh hợp chập bốn của mười phần tử. Ta có:

$$A_{10}^{4} = 5040 \text{ cách chọn.}$$

Ví dụ 7: Một dạ tiệc có 10 nam và 6 nữ giỏi khiêu vũ. Người ta chọn có thứ tự 3 nam và 3 nữ để ghép thành 3 cặp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Giải

Nhận xét rằng:

- Chọn 3 nam trong 10 nam. Vì 3 người này có thể đổi vị trí cho nhau nên số cách chọn là số chỉnh hợp chập 3 của 10, ta được:

$$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 8.9.10 = 720 \text{ cách.}$$

- Tương tự: số cách chọn 3 trong 6 nữ là:

$$A_{6}^{3} = \frac{6!}{3!} = 4.5.6 = 120 \text{ cách.}$$

Vậy, số cách chọn 3 cặp là:

$$A_{10}^{3}.A_{6}^{3} = 86400.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Từ các chữ số 1, 2, 5, 7, 8 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau và nhỏ hơn 276.

Bài tập 2: Cho tập A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

a. Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau được viết từ tập A ?

b. Trong các số đó, có bao nhiêu số chia hết cho 2 ?

c. Trong các số đó, có bao nhiêu số chia hết cho 5?

Bài tập 3: Có bao nhiêu thứ tự có thể xảy ra trong cuộc thi chạy giữa năm vận động viên ?

Bài tập 4: Giả sử rằng có tám vận động viên chạy thi. Người thắng sẽ nhận được huy chương vàng, người về đích thứ hai nhận huy chương bạc, người về đích thứ ba nhận huy chương đồng. Có bao nhiêu cách trao các huy chương này nếu tất cả các kết cục của cuộc thi đều có thể xảy ra ?

Bài tập 5: Bao nhiêu khả năng có thể xảy ra đối với các vị trí thứ nhất, thứ nhì và ba trong cuộc đua có 12 con ngựa, nếu mọi thứ tự tới đích đều có thể ?

Bài tập 6: Có một trăm vé đánh số từ 1 đến 100 được bán cho 100 người khác nhau. Người ta sẽ trao 4 giải thưởng kể cả giải độc đắc. Hỏi

a. Có bao nhiêu cách trao giải thưởng ?

b. Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu người giữ vé 47 trúng giải độc đắc ?

c. Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu người giữ vé 47 trúng một trong các giải ?

d. Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu người giữ vé 47 không trúng thưởng ?

e. Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu hai người giữ vé 19 và 47 trúng thưởng ?

f. Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu ba người giữ vé 19, 47 và 73 trúng thưởng ?

g. Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu bốn người giữ vé 19, 47, 73 và 97 trúng thưởng ?

h. Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu không ai trong bốn người giữ vé 19, 47, 73 và 97 trúng thưởng ?

i. Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu một trong bốn người giữ vé 19, 47, 83 và 97 trúng giải độc đắc?

j. Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu những người giữ vé 19, 47 trúng giải nhưng những người có vé 73 và 97 không trúng giải ?

Bài tập 7: Có bao nhiêu biển đăng ký xe chứa 3 chữ cái tiếp theo là 3 chữ số, nếu các chữ cái hoặc chữ số không xuất hiện quá một lần ?

Bài tập 8: Trong trận chung kết giải vô địch bóng đá thế giới để chấm dứt tình trạng ngang điểm người ta áp dụng thủ tục đá luân lưu như sau: Mỗi đội chọn ra năm cầu thủ theo một thứ tự nhất định. Mỗi cầu thủ thực hiện một quả đá phạt đền, cầu thủ đội này đá xong thì đến lượt cầu thủ của đội kia và cứ tiếp diễn như thế theo thứ tự của các cầu thủ đã xác định. Nếu tỷ số trận đấu sau 10 quả đá phạt đền vẫn bằng nhau thì thủ tục này được lặp lại. Và nếu sau quả đá phạt đền thứ 20 mà tỷ số trận đấu vẫn còn bằng nhau thì luật "cái chết bất ngờ" sẽ được áp dụng, tức là, đội đầu tiên ghi bàn thắng mà không bị giáng trả sẽ là đội giành cúp vàng.

a. Có bao nhiêu tỷ số khác nhau có thể xảy ra nếu trận đấu kết thúc sau vòng đá 10 quả phạt đền thứ nhất ?

b. Có bao nhiêu tỷ số khác nhau có thể xảy ra nếu trận đấu kết thúc sau vòng đá 10 quả phạt đền thứ hai ?

c. Có bao nhiêu tỷ số khác nhau có thể xảy ra nếu trận đấu kết thúc sau khi thực hiện không quá 10 quả phạt đền theo luật "cái chết bất ngờ ?

CHỦ ĐỀ 4

TỔ HỢP

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho E là một tập hợp gồm n phần tử phân biệt.

Một tập con của E, gồm r phần tử phân biệt ($1 \le r \le n$), được gọi là một tổ hợp n chập r.

Thí dụ: Cho E = {a, b, c, d}, các tổ hợp 4 chập 3 của E là:

{a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d}.

Chú ý:

1. Theo định nghĩa, mỗi tổ hợp n chập r là một tập con r phần tử phân biệt, không kể thứ tự, của một tập gồm n phần tử.
2. Muốn hình thành các chỉnh hợp n chập r của một tập gồm n phần tử, ta có thể tiến hành theo hai bước liên tiếp sau:

   Bước 1. Tìm tất cả các tổ hợp r chập r.

   Bước 2. Tìm tất cả các hoán vị trong từng tổ hợp n chập r.

2. SỐ CÁC TỔ HỢP N CHẬP R

Ký hiệu C_n^r để chỉ tổ hợp n chập r, ta có:

$$C_n^r = \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!}, \text{ với } 0 \le r \le n \text{ và quy ước } C_n^0 = 1. \qquad (1)$$

Từ đó suy ra:

1. $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, với $0 \le r \le n$. (2)
2. $C_n^r = C_n^{n-r}$, với $0 \le r \le n$. (3)
3. $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$, với $0 \le r \le n$. (4)

II. CÁC DẠNG TOÁN

Bài toán 1: Rút gọn biểu thức.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để thực hiện việc rút gọn hoặc tính giá trị của biểu thức chứa các toán tử tổ hợp, chúng ta thường sử dụng công thức khai triển:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$$

và trong nhiều trường hợp việc sử dụng các hệ thức giữa các số C_n^k sẽ giúp giảm đáng kể độ phức tạp cho lời giải.

Ví dụ 1: Tính giá trị của các biểu thức:

$$B = \frac{\frac{1}{3}C_6^2 - \frac{1}{28}C_8^3 + \frac{1}{65}C_{15}^3}{P_3A_5^3}.$$

Giải

Ta có:

$$B = \frac{\frac{1}{3}\frac{6!}{2!4!} - \frac{1}{28}\frac{8!}{3!5!} + \frac{1}{65}\frac{15!}{3!2!}}{3!\frac{5!}{2!}} = \frac{\frac{1}{3}.15 - \frac{1}{28}.56 + \frac{1}{65}.455}{3.120}.$$

$$= \frac{5-2+7}{360} = \frac{10}{360} = \frac{1}{36}.$$

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên để thực hiện việc tính giá trị của biểu thức chúng ta chỉ cần sử dụng công thức khai triển. Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng các hệ thức giữa các số C_n^k.

Ví dụ 2: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \dfrac{C_{21}^4}{C_{19}^3 + C_{19}^4 + C_{20}^3}$. b. $B = \dfrac{C_{100}^{98} + C_{1000}^{998}}{C_{1000}^2 + C_{100}^2}$.

Giải

a. Sử dụng công thức:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, \text{ với } 0 \le k \le n, \text{ và } k, n \in \mathbf{N}$$

ta được:

$$A = \frac{C_{21}^4}{C_{20}^4 + C_{20}^3} = \frac{C_{21}^4}{C_{21}^4} = 1.$$

b. Sử dụng công thức:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \text{ với } 0 \le k \le n, \text{ và } k, n \in \mathbf{N}$$

ta được:

$$B = \frac{C_{100}^2 + C_{1000}^2}{C_{1000}^2 + C_{100}^2} = 1.$$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức:

$$T = \frac{n!}{(n-3)!A_n^2} - \frac{P_{n+1}}{(n+2)!}.$$

Giải

Ta lần lượt có:

$$\frac{n!}{(n-3)!A_n^2} = \frac{n!}{(n-3)!\frac{n!}{(n-2)!}} = \frac{n!(n-2)!}{(n-3)!n!} = n-2$$

$$\frac{P_{n+1}}{(n+2)!} = \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \frac{1}{n+2}$$

Khi đó:

$$T = (n-2) - \frac{1}{(n+2)} = \frac{(n-2)(n+2)-1}{n+2} = \frac{n^2-5}{n+2}.$$

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên để giảm thiểu độ phức tạp của biểu thức cần biến đổi chúng ta đã lựa chọn việc biến đổi từng phần. Ví dụ tiếp theo sẽ khẳng định thêm nhận định này.

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức:

$$A = C_n^1 + 2\frac{C_n^2}{C_n^1} + ... + n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}}.$$

Giải

Ta lần lượt có:

$$C_n^1 = n,$$

$$2\frac{C_n^2}{C_n^1} = 2.\frac{\dfrac{n!}{2!.(n-2)!}}{\dfrac{n!}{1!.(n-1)!}} = n - 1.$$

...

$$n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = \frac{1}{\dfrac{n!}{(n-1)!.1!}} = 1,$$

suy ra:

$$A = C_n^1 + 2\frac{C_n^2}{C_n^1} + ... + n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = n + (n-1) + ... + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm giá trị của các đại lượng sau:

a. C_4^2. b. C_{11}^8. c. C_9^4.

Bài tập 2: Rút gọn biểu thức:

$$P = (P_n)^3.C_n^n C_{2n}^n C_{3n}^n.$$

Bài tập 3: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $P = C_5^3 C_4^2 + C_4^2 C_3^1 + C_3^1 C_3^0$.

b. $S = \dfrac{1 + C_7^4 + C_7^3 - C_8^4}{1 + C_{10}^5 + C_{10}^6 - C_{11}^6} + \dfrac{A_3^2}{P_2}$.

Bài tập 4: Rút gọn các biểu thức sau:

a. $Q = \dfrac{P_{n+2}}{A_n^k P_{n-k}} + \dfrac{C_{15}^8 + 2C_{15}^9 + C_{15}^{10}}{C_{17}^{10}}$.

b. $I = \dfrac{P_{n+1}}{A_n^k P_{n-k}} + \dfrac{C_{15}^5 + 2C_{15}^6 + C_{15}^7}{C_{17}^7}$.

Bài toán 2: Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

- Để chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức chứa các toán tử tổ hợp, chúng ta thường sử dụng công thức khai triển.
- Đối với bất đẳng thức chứa các toán tử tổ hợp mang tính đặc thù trong nhiều trường hợp chúng ta sử dụng tính đơn điệu của dãy số để chứng minh, cụ thể với dãy số $\{u_n\}$ để chứng minh $u_k \le u_0$ ta đi chứng minh dãy $\{u_n\}$ đơn điệu giảm.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với các số r, n nguyên, không âm và $0 \le r \le n$ ta có:

$$C_n^r = \frac{nC_{n-1}^{r-1}}{r}.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{nC_{n-1}^{r-1}}{r} = \frac{n}{r}.\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_n^r\text{, đpcm.}$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với các số r, n nguyên, không âm và $0 \le r \le n$ ta có:

$$n.C_n^r = (r+1)C_n^{r+1} + rC_n^r.$$

Giải

Ta có:

$$n.C_n^r = n.\frac{n!}{r!(n-r)!} = [(n-r)+r]\frac{n!}{r!(n-r)!} = (n-r)\frac{n!}{r!(n-r)!} + r.\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= (r+1).\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} + r.\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= (r+1)C_n^{r+1} + rC_n^r\text{, đpcm.}$$

***Nhận xét*: Như vậy , qua 2 ví dụ trên chúng ta đã làm quen được với phương pháp chứng minh đẳng thức tổ hợp dựa trên công thức tính ban đầu, tiếp theo chúng ta minh hoạ ví dụ sử dụng công thức phân tách.**

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với các số r, n nguyên, không âm và $0 \le r \le n$ ta có:

$$C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + \ldots + C_{r-1}^{r-1}.$$

Giải

Ta có:

$$VP = (C_n^r - C_{n-1}^r) + (C_{n-1}^r - C_{n-2}^r) + \ldots + C_{r-1}^{r-1} = C_n^r = VT\text{, đpcm.}$$

***Nhận xét*: Như vậy , chúng ta đã chứng minh đẳng thức tổ hợp bằng việc biến đổi vế phức tạp thành vế đơn giản dựa trên công thức tính ban đầu hoặc công thức phân tách. Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ phương pháp gom các toán tử liên kết.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng với $k, n \in \mathbf{N}$, $3 \le k \le n$ ta có:

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k.$$

Giải

Ta có:

$$VT = C_n^k + C_n^{k-1} + 2(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}) + C_n^{k-2} + C_n^{k-3}$$
$$= C_{n+1}^k + 2C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2} = (C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1}) + (C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2})$$
$$= C_{n+2}^k + C_{n+2}^{k-1} = C_{n+3}^k, \text{ đpcm.}$$

Chú ý: Ví dụ tiếp theo sẽ được chúng minh bằng hai cách để giúp các em học sinh hình thành được phương pháp luận cho "*Ý nghĩa của hai biểu thức ở hai vế*".

Ví dụ 5: Chứng minh rằng:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \text{ với } 0 \le k \le n,\ k, n \in \mathbf{N}.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1 (Sử dụng công thức khai triển): Ta có:

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!.(n-n+k)!} = \frac{n!}{k!.(n-k)!} = C_n^k, \text{ đpcm.}$$

Cách 2 (Dựa trên ý nghĩa): Ta có nhận định rằng "*Tồn tại một song ánh từ các tập con của tập X có k phần tử vào tập các tập con của tập X có n − k phần tử bằng phép lấy phần bù đối với X*", do đó suy ra:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \text{ với } 0 \le k \le n.$$

Ví dụ 6: Chứng minh rằng:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, \text{ với } 0 \le k \le n.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1 (Sử dụng công thức khai triển): Ta có:

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!.(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!.(n-k)!}$$
$$= \frac{(n-1)!.(n-k)}{k!.(n-k)!} + \frac{(n-1)!.k}{k!.(n-k)!}$$
$$= \frac{(n-1)!}{k!.(n-k)!}.[(n-k)+k] = \frac{(n-1)!.n}{k!.(n-k)!} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$$
$$= C_n^k, \text{ đpcm.}$$

Cách 2 (Dựa trên ý nghĩa): Ta có nhận định rằng "*Tổ hợp chập k của n phần tử (bằng C_n^k) bao gồm những tổ hợp chứa một phần tử cho trước (giả sử là a) và những tổ hợp không chứa a*".

Trong đó:

- Các tổ hợp có chứa a được lập từ cách chọn (k − 1) vật trong (n − 1) vật còn lại. Như vậy có C_{n-1}^{k-1} tổ hợp chứa a.
- Các tổ hợp không chứa a được lập từ cách chọn k vật trong (n − 1) vật, sau khi đã loại a ra. Như vậy có C_{n-1}^{k} tổ hợp không chứa a.

Do đó, ta được:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}\text{, đpcm.}$$

Ví dụ 7: Chứng minh rằng:

$$C_{m-1}^{p-1} + C_{m-2}^{p-1} + C_{m-3}^{p-1} + \ldots + C_{p}^{p-1} + C_{p-1}^{p-1} = C_m^p.$$

Giải

Áp dụng công thức: $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

Ta có:

$$C_{m-1}^{p-1} + C_{m-1}^{p} = C_m^p$$

$$C_{m-2}^{p-1} + C_{m-2}^{p} = C_{m-1}^p$$

.....

$$C_{m-1}^{p-1} + C_{m-3}^{p} = C_{m-2}^p$$

$$C_{p}^{p-1} + C_{p}^{p-3} = C_{p+1}^p$$

Cộng các đẳng thức trên vế theo vế, ta có:

$$C_{m-1}^{p-1} + C_{m-2}^{p-1} + C_{m-3}^{p-1} + \ldots + C_{p}^{p-1} + C_p^p = C_m^p. \qquad (*)$$

Vì

$$C_p^p = 1 = C_{p-1}^{p-1}.$$

thay vào (*), ta có đẳng thức phải chứng minh.

Chú ý: Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng phương pháp qui nạp toán học để chứng minh đẳng thức tổ hợp.

Ví dụ 8: Chứng minh rằng:

$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \ldots + C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^{n+1}. \qquad (*)$$

Giải

Trước hết, ta nhớ rằng:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Với k = 1, đẳng thức (*) có dạng:

$$C_n^n + C_{n+1}^n = C_{n+2}^{n+1} \Leftrightarrow 1 + \frac{(n+1)!}{n!.(n+1-n)!} = \frac{(n+2)!}{(n+1)!.(n+2-n-1)!}$$

$$\Leftrightarrow 1 + n + 1 = n + 2\text{, luôn đúng.}$$

Vậy, đẳng thức đúng với n = 1.

Giả sử đẳng thức đúng với k = m, tức là ta có:

$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \ldots + C_{n+m}^n = C_{n+m+1}^{n+1} \qquad (1)$$

ta cần đi chứng minh nó cũng đúng với k = m + 1, tức là cần chứng minh:

$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \dots + C_{n+m}^n + C_{n+m+1}^n = C_{n+m+2}^{n+1}.$$

Thật vậy, với kết quả từ (1), ta được:

$$VT = C_{n+m+1}^{n+1} + C_{n+m+1}^{n} = C_{n+m+2}^{n+1} = VP, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 9: Cho dãy (S_m), $m \in \mathbf{N}$ và $m \geq 4$, xác định như sau:

$$S_4 = 1,$$

$$S_{m+1} = S_m + 1(m-2) + 2(m-3) + 3(m-4) + \dots + (m-2).1$$

Chứng minh rằng $S_m = C_m^4$.

Giải

Theo giả thiết:

$$S_4 = 1 = C_4^4.$$

Tiếp theo, ta biến đổi biểu thức:

$$\begin{aligned} A &= 1(m-2) = 2(m-3) + 3(m-4) + \dots + (m-2).1 \\ &= 1[(m-1)-1] + 2[(m-1)-2] + 3[(m-1)-3] + \dots \\ &\qquad + (m-2)[(m-1)-(m-2)] \\ &= (m-1) + 2(m-1) + 3(m-1) + \dots + (m-2)(m-1) - \\ &\qquad - [1 + 4 + 9 + \dots + (m-2)^2)] \\ &= (m-1)[1 + 2 + 3 + \dots + (m-2)] - \\ &\qquad - [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (m-2)^2] \\ &= \frac{(m-1)(m-2)(m-1)}{2} - \frac{(m-2)(m-1)(2m-3)}{6} = \frac{m(m-1)(m-2)}{6} = C_m^3. \end{aligned}$$

Do đó, ta có:

$$S_{m+1} = S_m + C_m^3$$

suy ra:

$$S_m = S_{m-1} + C_{m-1}^3 = C_{m-1}^3 + C_{m-2}^3 + \dots + C_3^3.$$

Từ đó, bài toán được chuyển về việc chứng minh rằng:

$$C_{m-1}^3 + C_{m-2}^3 + \dots + C_3^3 = C_4^4. \qquad (1)$$

Đẳng thức (1) được chứng minh bằng phương pháp qui nạp toán học.

Ví dụ 10: Chứng minh rằng:

$$C_{2001}^k + C_{2001}^{k+1} \leq C_{2001}^{1000} + C_{2001}^{1001} \text{ với } 0 \leq k \leq 1000,\ k \in \mathbf{N}.$$

Giải

Biến đổi bất đẳng thức về dạng:

$$C_{2002}^{k+1} \leq C_{2002}^{1001}.$$

Ta xét dãy số:

$$u_k = C_{2002}^{k+1} \text{ với } 0 \leq k \leq 1000,\ k \in \mathbf{N}.$$

Ta đi chứng minh dãy $\{u_k\}$ đơn điệu tăng, thật vậy:

$$u_{k+1} > u_k = C_{2002}^{k+2} > C_{2002}^{k+1} \Leftrightarrow \frac{2002!}{(k+2)!.(2000-k)!} > \frac{2002!}{(k+1)!.(2000-k+1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k+2} > \frac{1}{2001-k} \Leftrightarrow 1999 > 2k \Leftrightarrow k \le 999$$

$$\Rightarrow u_k \le u_{999} \Leftrightarrow C_{2002}^{k+1} \le C_{2002}^{1000} < C_{2002}^{1001} \Leftrightarrow C_{2002}^{k+1} \le C_{2002}^{1001}$$, đpcm.

Ví dụ 11: Chứng minh rằng với $0 \le k \le n$ và $k, n \in \mathbf{Z}$ luôn có:

$$C_{2n+k}^{n} . C_{2n-k}^{n} \le (C_{2n}^{n})^2.$$

Giải

Cố định n, ta xét dãy số:

$$u_k = C_{2n+k}^{n} . C_{2n-k}^{n} \text{ với } 0 \le k \in \mathbf{Z},$$

khi đó, bất đẳng thức được biểu diễn dưới dạng:

$$u_k \le u_0 \text{ với } 0 \le k \in \mathbf{Z}.$$

Ta đi chứng minh dãy $\{u_k\}$ đơn điệu giảm, thật vậy:

$$u_{k+1} < u_k \Leftrightarrow \frac{(2n+k+1)!}{n!.(n+k+1)!}.\frac{(2n-k-1)!}{n!.(n-k-1)!} < \frac{(2n+k)!}{n!.(n+k)!}.\frac{(2n-k)!}{n!.(n-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+k+1}{n+k+1} < \frac{2n-k}{n-k} \Leftrightarrow n + 2nk > 0 \text{ luôn đúng.}$$

Suy ra:

$$u_k \le u_0 \text{ với } 0 \le k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow C_{2n+k}^{n} . C_{2n-k}^{n} \le (C_{2n}^{n})^2$$, đpcm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh rằng với $k, n \in \mathbf{N}$, $2 \le k \le n$ luôn có:

$$k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}.$$

Bài tập 2: Chứng minh rằng với $k, n \in \mathbf{N}$, $4 \le k \le n$ ta có:

$$C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k.$$

Bài tập 3: Chứng minh rằng:

a. $2C_n^k + 5C_n^{k+1} + 4C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{m+2}^{k+2} + C_{m+3}^{k+3}.$

b. $2C_n^k + 5C_n^{k+1} + 4C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3}.$

Bài tập 4: Chứng minh rằng với $k, n \in \mathbf{Z}$, $2 \le k \le n$ luôn có:

$$k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}.$$

Bài tập 5: Chứng minh rằng: $\dfrac{2^{100}}{10\sqrt{2}} < C_{100}^{50} < \dfrac{2^{100}}{10}$.

Bài tập 6: Cho dãy số (S_m) với $m \in \mathbf{Z}^+$, $m \ge 4$ định nghĩa bởi:

$$\begin{cases} S_4 = 1 \\ S_{m+1} = S_m + 1(m-2) + 2(m-3) + 3(m-4) + \ldots + (m-2) \end{cases}.$$

Chứng minh rằng: $S_m = C_m^4$.

Bài tập 7: Chứng tỏ rằng nếu p là nguyên tố và k là số nguyên sao cho $1 \le k \le p - 1$ thì khi đó C_p^k chia hết cho p.

Bài tập 8: Chứng minh công thức:

$$C_n^r . C_r^k = C_n^k . C_{r-k}^{n-k}$$

trong đó n, r, k là các số nguyên không âm với $r \le n$ và $k \le r$.

a. Bằng lý thuyết tổ hợp.

b. Bằng cách sử dụng công thức tính số tổ hợp chập r của tập có n phần tử.

Bài toán 3: Giải phương trình, bất phương trình và hệ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để giải phương trình, bất phương trình chứa các toán tử tổ hợp, chúng ta chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện việc đơn giản biểu thức để chuyển phương trình, bất phương trình về dạng đại số quen thuộc.

Cách 2: Đánh giá thông qua giá trị cận trên hoặc cận dưới.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \frac{7}{2}x$.

Giải

Điều kiện $3 \le x \in \mathbb{N}$. (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{x!}{1!(x-1)!} + \frac{x!}{2!(x-2)!} + \frac{x!}{3!(x-3)!} = \frac{7x}{2}$$

$$\Leftrightarrow x\left[\frac{1}{6}(x-2)(x-1) + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{5}{2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1) + 3(x-1) - 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x = 4.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 4$.

Ví dụ 2: Tìm các số x nguyên dương thoả mãn phương trình:

$$C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x.$$

Giải

Điều kiện $3 \le x \in \mathbb{N}$. (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{x!}{(x-1)!} + \frac{6x!}{2!.(x-2)!} + \frac{6x!}{3!.(x-3)!} = 9x^2 - 14x$$

$$\Leftrightarrow x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2) = 9x^2 - 14x \Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + 14x = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x = 7.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 7$.

Ví dụ 3: Tìm $k \in \mathbf{N}$, biết:

$$C_{14}^{k} + C_{14}^{k+2} = 2C_{14}^{k+1}.$$

Giải

Điều kiện $12 \ge k \in \mathbf{N}$. (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{14!}{k!.(14-k)!} + \frac{14!}{(k+2)!.(12-k)!} = \frac{2.14!}{(k+1)!.(13-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(14-k)(13-k)} + \frac{1}{(k+2)(k+1)} = \frac{2}{(k+1)(13-k)}$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 12k + 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 4 \\ k = 8 \end{array}\right., \text{ thoả mãn điều kiện } (*).$$

Vậy, tồn tại hai giá trị của k là k = 4 hoặc k = 8 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 4: Giải bất phương trình:

$$\frac{1}{2}A_{2x}^{2} - A_{x}^{2} \le \frac{6}{x}C_{x}^{3} + 10.$$

Giải

Điều kiện $3 \le x \in \mathbf{N}$. (*)

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\frac{1}{2}.\frac{(2x)!}{(2x-2)!} - \frac{x!}{(x-2)!} \le \frac{6}{x}.\frac{x!}{3!.(x-3)!} + 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.(2x-1).2x - (x-1).x \le \frac{6}{x}.\frac{(x-2)(x-1)x}{3!} + 10$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)x - (x-1)x \le (x-2)(x-1) + 10$$

$$\Leftrightarrow 3x - 12 \le 0 \Leftrightarrow x \le 4 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} 3 \le x \le 4 \overset{x \in N}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 4 \end{array}\right..$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là x = 3 và x = 4.

Ví dụ 5: Giải bất phương trình:

$$C_{n-1}^{4} - C_{n-1}^{3} - \frac{5}{4}A_{n-2}^{2} < 0.$$

Giải

Điều kiện $5 \le n \in \mathbf{N}$. (*)

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\frac{(n-1)!}{4!(n-5)!} - \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} - \frac{5(n-2)!}{4(n-4)!} < 0 \Leftrightarrow (n-4)(n-1)! - 4(n-1)! - 30(n-2)! < 0$$

$$\Leftrightarrow (n-2)!\,[(n-4)(n-1) - 4(n-1) - 30] < 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 9n - 22 < 0 \Leftrightarrow -2 < n < 11 \Leftrightarrow 5 \le n < 11$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta nhận được nghiệm của bất phương trình là:

n = 5; n = 6; n = 7; n = 8; n = 9; n = 10.

Ví dụ 6: Giải bất phương trình:

$$\frac{C_{n-1}^{n-3}}{A_{n+1}^{4}} < \frac{1}{14P_3}.$$

Giải

Điều kiện $3 \le n \in \mathbf{N}$. (*)

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\frac{\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!\,2!}}{\dfrac{(n+1)!}{(n-3)!}} < \frac{1}{14.3!} \Leftrightarrow \frac{(n-1)!}{2(n+1)!} < \frac{1}{84} \Leftrightarrow \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{1}{84}$$

$$\Leftrightarrow n(n+1) > 42 \Leftrightarrow n^2 + n - 42 > 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} n \ge 6.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $6 \le n \in \mathbf{N}$.

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} A_y^x : P_{x-1} + C_y^{y-x} = 126 \\ P_{x+1} = 720 \end{cases}.$$

Giải

Điều kiện $x, y \in \mathbf{N}$ và $1 \le x \le y$. (*)

Biến đổi hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{y!}{(y-x)!(x-1)!} + \dfrac{y!}{(y-x)!x!} = 126 \\ (x+1)! = 6! \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y!(x+1)}{(y-x)!x!} = 126 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y!6}{(y-5)!5!} = 126 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow (y-4)(y-3)(y-2)(y-1)y = 21.5! \Leftrightarrow y = 7$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm $x = 5$ và $y = 7$.

Ví dụ 8: Tìm $x, y \in \mathbf{Z}^+$ để:

$$\frac{C_{x+1}^{y}}{6} = \frac{C_x^{y+1}}{5} = \frac{C_x^{y-1}}{2}.$$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 0 \le y \le x+1 \\ 0 \le y+1 \le x \\ 0 \le y-1 \le x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 1 \\ x \ge y+1 \end{cases}.$$

a. Xét phương trình:

$$\frac{C_{x+1}^{y}}{6} = \frac{C_x^{y+1}}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{6}\cdot\frac{(x+1)!}{y!.(x+1-y)!} = \frac{1}{5}\cdot\frac{x!}{(y+1)!.(x-y-1)!}$$

$$\Leftrightarrow 5(x+1)(y+1) = 6(x-y)(x-y+1). \quad (1)$$

b. Xét phương trình:

$$\frac{C_x^{y+1}}{5} = \frac{C_x^{y-1}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{5}.\frac{x!}{(y+1)!.(x-y-1)!} = \frac{1}{2}.\frac{x!}{(y-1)!.(x-y+1)!}$$

$$\Leftrightarrow 2(x-y)(x-y+1) = 5y(y+1). \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra:

$$5(x+1)(y+1) = 3.\,5y(y+1) \Leftrightarrow x+1 = 3y \Leftrightarrow x = 3y-1. \qquad (3)$$

Thay (3) vào (2) được:

$$2(3y-1-y)(3y-1-y+1) = 5y(y+1) \Leftrightarrow 3y^2 = 9y \Leftrightarrow y = 3 \overset{(3)}{\Rightarrow} x = 8.$$

Vậy, nghiệm của hệ là x = 8 và y = 3.

Ví dụ 9: Tìm x và y, biết:

$$\left(A_{x-1}^{y} + yA_{x-1}^{y-1}\right) : A_x^{y-1} : C_x^{y-1} = 10:2:1.$$

Giải

Điều kiện $3 \le n \in \mathbb{N}$. (*)

Biến đổi hệ thức về dạng hệ phương trình:

$$\begin{cases}\left(A_{x-1}^{y} + yA_{x-1}^{y-1}\right) : A_x^{y-1} = 10:2 \\ A_x^{y-1} : C_x^{y-1} = 2:1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\frac{(x-1)!}{(x-1-y)!} + \frac{y(x-1)!}{(x-y)!}\right] : \frac{x!}{(x+1-y)!} = 5 \\ \frac{x!}{(x+1-y)!} : \frac{x!}{(x-y+1)!.(y-1)!} = 2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{(x-1)!(x-y)+y(x-1)!}{(x-y)!}.\frac{(x-y+1)!}{x!} = 5 \\ (y-1)! = 2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{(x-1)!(x-y+y)(x-y+1)}{x!} = 5 \\ y = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y+1 = 5 \\ y = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 7 \\ y = 3\end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm x = 7 và y = 3.

Ví dụ 10: Tìm k sao cho các số C_7^k, C_7^{k+1}, C_7^{k+2} theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Giải

Điều kiện $5 \ge k \in \mathbb{N}$. (*)

Các số C_7^k, C_7^{k+1}, C_7^{k+2} theo thứ tự lập thành cấp số cộng điều kiện là:

$$C_7^k + C_7^{k+2} = 2C_7^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7!}{k!.(7-k)!} + \frac{7!}{(k+2)!.(5-k)!} = \frac{2.7!}{(k+1)!.(6-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{.(7-k)(6-k)} + \frac{1}{(k+2)(k+1)} = \frac{2}{(k+1)(6-k)}$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 5k + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 4 \end{array}\right., \text{ thoả mãn điều kiện (*).}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm k = 1 hoặc k = 4.

Ví dụ 11: Tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$$

trong đó m là 1 số nguyên dương cho trước.

Giải

Gọi $S_n(m)$ là số nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho.

Ta lần lượt tính $S_1(m)$, $S_2(m)$, $S_3(m)$,...,$S_n(m)$.

- $S_1(m)$ là số nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x_1 = m$$

phương trình có 1 nghiệm nguyên dương duy nhất, do đó:

$$S_1(m) = 1 = C_{m-1}^{0}.$$

- $S_2(m)$ là số nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x_1 + x_2 = m$$

Vì x_1 có thể có lần lượt các giá trị 1, 2, 3, ..., m – 1 nên phương trình có các nghiệm sau:

$$(1, m-1), (2, m-2), (3, m-3), \ldots, (m-1, 1),$$

có tất cả (m – 1) nghiệm nguyên dương, do đó:

$$S_2(m) = m - 1 = C_{m-1}^{1}$$

- $S_3(m)$ là số nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 = m. \qquad (*)$$

Với $x_1 = 1$, ta có:

$$x_2 + x_3 = m - 1 \qquad (1)$$

Theo trên, số nghiệm nguyên dương của phương trình (1) bằng:

$$S_2(m-1) = m - 2$$

Với $x_1 = 2$, ta có:

$$x_2 + x_3 = m - 2 \qquad (2)$$

Số nghiệm nguyên dương của (2) bằng:

$$S_2(m-2) = m - 3$$

...

Với $x_1 = m - 2$, ta có:

$$x_2 + x_3 = 2$$

ta được $S_2(2) = 1$.

Do đó, số nghiệm nguyên dương của (*) bằng

$$S_3(m) = S_2(m-1) + S_2(m-2) + \ldots + S_2(2)$$

$$= (m-2) + (m-3) + \ldots + 1 = \frac{(m-1)(m-2)}{2} = C_{m-1}^{2}.$$

Từ đó, ta giả sử số nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = m$$

là $S_k(m) = C_{m-1}^{k-1}$.

Ta chứng minh số nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1} = m$$

là $S_{k+1}(m) = C_{m-1}^{k}$ – *Bạn đọc tự chứng minh.*

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình:

a. $C_{x+8}^{x+3} = 5\,A_{x+6}^{3}$.

b. $C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + C_x^{x-3} + \ldots + C_x^{x-10} = 1023$.

Bài tập 2: Giải các bất phương trình:

a. $C_{13}^{m} < C_{13}^{m+2}$, $m \in \mathbf{N}$.

b. $C_{18}^{m-2} > C_{18}^{m}$, $m \in \mathbf{Z}^+$.

c. $C_n^6 < C_n^4$, $n \in \mathbf{Z}^+$.

d. $C_{n+1}^{n-2} - C_{n+1}^{n-1} \le 100$, $n \in \mathbf{Z}^+$.

Bài tập 3: Giải bất phương trình:

$$2\,C_{x+1}^{2} + 3\,A_x^{2} < 30.$$

Bài tập 4: Giải các bất phương trình:

a. $\dfrac{A_{n+1}^{4}}{C_{n-1}^{n-3}} < 14P_3$.

b. $\dfrac{C_{n-1}^{n-3}}{A_{n+1}^{4}} < \dfrac{1}{14.P_3}$.

Bài tập 5: Giải bất phương trình:

$$C_{x-1}^{4} - C_{x-1}^{3} - \frac{5}{4}A_{x-2}^{2} < 0,\ x \in \mathbf{Z}.$$

Bài tập 6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2A_x^y + C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}.$$

Bài tập 7: Định x và y sao cho:

a. $C_{x+1}^{y} : C_x^{y+1} : C_x^{y-1} = 6:5:2$.

b. $(A_{x-1}^{y} + y\,A_{x-1}^{y-1}) : A_x^{y-1} : C_x^{y-1} = 10:2:1$.

Bài tập 8: Tìm miền giá trị của hàm số:

$$f(x) = C_{x+1}^{2x-8}.$$

Bài toán 4: Thực hiện bài toán đếm

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng tổ hợp chập k của n phần tử, chúng ta thường dựa trên các dấu hiệu đặc trưng sau:

- Phải chọn k phần tử từ n phần tử cho trước.
- Không phân biệt thứ tự giữa k phần tử được chọn.

Ví dụ 1: Mẫu tự Anh có 26 chữ cái trong đó có 5 nguyên âm. Hỏi có bao nhiêu từ Anh ngữ gồm 6 mẫu tự trong đó có 2 nguyên âm phân biệt và 4 phụ âm phân biệt ?

Giải

Nhận xét rằng:

- Có C_5^2 cách chọn 2 nguyên âm phân biệt.
- Có C_{21}^4 cách chọn 4 phụ âm phân biệt.
- Với mỗi bộ 6 mẫu tự, ta có $P_6 = 6!$ từ.

Vậy, có tất cả:

$$C_5^2.C_{21}^4.6! = \frac{5!}{2!3!}.\frac{21!}{4!17!}.6! = 10.18.19.20.21.30 = 43092000.$$

Ví dụ 2: Ông X có 11 người bạn. Ông ta muốn mời 5 người trong số họ đi chơi xa. Trong 11 người đó có 2 người không muốn gặp mặt nhau. Hỏi ông X có bao nhiêu cách mời ?

Giải

Có 2 khả năng:

- Ông X chỉ mời 1 trong 2 người đó và mời thêm 4 trong số 9 người còn lại, khi đó ta có:

$$2C_9^4 = 2.\frac{9!}{4!5!} = \frac{2.6.7.8.9}{24} = 252 \text{ cách.}$$

- Ông X không mời ai trong hai người đó cả mà chỉ mời 5 trong 9 người bạn kia, khi đó ta có:

$$C_9^5 = 126 \text{ cách.}$$

Vậy, số cách mời tất cả là:

$252 + 126 = 378$ cách.

Chú ý: Rất nhiều em học sinh khi giải ví dụ trên bỏ quên mất khả năng thứ 2.

Ví dụ 3: Một cái hộp đựng 7 quả cầu trắng và 3 quả cầu đỏ. Ta lấy ra 4 quả cầu.

a. Hỏi có thể có bao nhiêu cách ?

b. Trong đó có bao nhiêu cách lấy 2 quả cầu đỏ ?

c. Có bao nhiêu cách lấy nhiều nhất 2 quả cầu đỏ ?

d. Có bao nhiêu cách lấy ít nhất là 2 quả cầu đỏ ?

Giải

a. Mỗi cách lấy ra 4 quả cầu trong số 7 quả ứng với một tổ hợp chập 4 của 7 phần tử. Do đó, số cách lấy bằng:

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = 210 \text{ cách.}$$

b. Ta có:

- Với 3 quả cầu đỏ lấy 2 quả, do đó có C_3^2 cách
- Với 7 quả cầu trắng lấy 2 quả, do đó có C_7^2 cách.

Vậy, có tất cả:

$$C_3^2.C_7^2 = 3.21 = 63 \text{ cách.}$$

c. Ta có các trường hợp:

- Chọn 2 đỏ và 2 trắng, khi đó có $C_3^2.C_7^2$ cách.
- Chọn 1 đỏ và 3 trắng, khi đó có $C_3^1.C_7^3$ cách.
- Chọn 4 trắng, khi đó có C_7^4 cách.

Vậy, có tất cả:

$$C_3^2.C_7^2 + C_3^1.C_7^3 + C_7^4 = 63 + 105 + 35 = 203 \text{ cách.}$$

d. Ta có các trường hợp:

- Chọn 2 đỏ và 2 trắng, khi đó có $C_3^2.C_7^2$ cách.
- Chọn 3 đỏ và 1 trắng, khi đó có $C_3^3.C_7^1$ cách.

Vậy, có tất cả:

$$C_3^2.C_7^2 + C_3^3.C_7^1 = 63 + 7 = 70 \text{ cách.}$$

Ví dụ 4: Cho 7 điểm trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng.

a. Có bao nhiêu đường thẳng mà mỗi đường thẳng đi qua 2 trong 7 điểm nói trên ?

b. Có bao nhiêu tam giác với các đỉnh là 3 trong 7 điểm nói trên ?

Giải

a. Mỗi cặp điểm không kể thứ tự, trong 7 điểm đã cho xác định một đường tlhẳng và ngược lại.

Vậy số đường thẳng đi qua 2 trong 7 điểm nói trên bằng:

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!.(7-2)!} = \frac{6.7}{1.2} = 21 \text{ đường thẳng.}$$

b. Mỗi bộ 3 điểm không kể thứ tự, trong 7 điểm đã cho xác định một tam giác và ngược lại.

Vậy số tam giác có đỉnh là 3 trong 7 điểm nói trên bằng:

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!.(7-3)!} = \frac{5.6.7}{1.2.3} = 35 \text{ tam giác.}$$

Ví dụ 5: Tìm số giao điểm tối đa của:

a. 10 đường thẳng phân biệt

b. 6 đường tròn phân biệt

c. 10 đường thẳng và 6 đường tròn trên.

Giải

a. Hai đường thẳng phân biệt có tối đa 1 giao điểm. Số giao điểm tối đa của 10 đường thẳng phân biệt là số tổ hợp chập 2 của 10, do đó bằng:

$$C_{10}^2 = 45 \text{ điểm.}$$

b. Hai đường tròn phân biệt có tối đa 2 giao điểm. Số giao điểm tối đa của đường tròn phân biệt gấp 2 lần số tổ hợp chập 2 của 6, do đó bằng:

$$2C_6^2 = 2.15 = 30 \text{ điểm.}$$

c. Một đường thẳng cắt một đường tròn tối đa tại 2 điểm. Do đó số giao điểm tối đa của 10 đường thẳng phân biệt với 6 đường tròn phân biệt bằng:

$$10 \times 6 \times 2 = 120 \text{ điểm.}$$

Khi đó, số các giao điểm bằng:

$$45 + 30 + 120 = 195 \text{ điểm.}$$

Ví dụ 6:

a. Có bao nhiêu đường chéo trong 1 đa giác lồi n cạnh ?

b. Một đa giác lồi có bao nhiêu cạnh để số đường chéo bằng 35 ?

Giải

a. Ta có:

- Mỗi đa giác lồi n cạnh thì có n đỉnh.
- Mỗi đoạn thẳng nối 2 đỉnh bất kỳ, không kể thứ tự, thì hoặc là một cạnh, hoặc là một đường chéo của đa giác đó.

Vậy số đường chéo (ký hiệu là C_n) của đa giác n cạnh bằng:

$$C_n = C_n^2 - n. \qquad (1)$$

b. Với $C_n = 35$, ta được:

$$C_n^2 - n = 35 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 70 = 0 \xleftrightarrow{n \in N^+ \ \& \ n \geq 3} n = 10.$$

Vậy, đa giác lồi 10 cạnh sẽ có 35 đường chéo.

Ví dụ 7: Có bao nhiêu cách chia n vật khác nhau thành k nhóm mà nhóm thứ nhất có n_1 vật, nhóm thứ hai có n_2 vật,..., nhóm thứ k có n_k vật và hai nhóm bất kì không chứa vật nào chung ?

Giải

Ta có:

- Số cách chọn n_1 trong n vật bằng $C_n^{n_1}$.
- Số vật còn lại là $n - n_1$. Có $C_{n-n_1}^{n_2}$ cách chọn n_2 vật trong $(n - n_1)$ vật.
- Số vật còn lại sau lần chọn thứ hai là $n - n_1 - n_2$. Có $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$ cách chọn n_3 vật trong $(n - n_1 - n_2)$.

...

- Số cách chọn n_k vật trong $(n - n_1 - n_2 - ... - n_{k-1})$ vật bằng $C_{n-n_1-n_2-...-n_{k-1}}^{n_k}$.

Do đó, số cách chia n vật thành k nhóm n_1 vật, n_2 vật, ..., n_k vật phân li mà tổng bằng n là:

$$C_n^{n_1}.C_{n-n_1}^{n_2}.C_{n-n_1-n_2}^{n_3}...C_{n-n_1-n_2-n_3-...-n_{k-1}}^{n_k}$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}.\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}.\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}$$

$$...\frac{(n-n_1-n_2-...-n_{k-1})!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3-...-n_{k-1}-n_k)!} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Chú ý: Đáp số của ví dụ trên chính là hoán vị n vật trong đó có n_1 vật lặp lại; n_2 vật khác lặp lại; ... , n_k vật khác lặp lại:

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1:

a. Trong một hộp có 7 quả cầu xanh, 5 quả cầu đỏ và 4 quả cầu vàng, các cầu đều khác nhau. Chọn ngẫu nhiên 4 quả trong hộp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho trong 4 quả cầu chọn ra có đủ 3 màu.

b. Giải bất phương trình: $2C_{x+1}^{2} + 3A_{x}^{2} < 30$.

Bài tập 2: Chứng minh rằng với số nguyên dương n cho trước có không quá hai số nguyên dương $k \le n - 1$ sao cho C_n^k, C_n^{k-1}, C_n^{k-2} lập thành cấp số cộng.

Bài tập 3: Cho n là một số nguyên dương cố định. Chứng minh rằng: C_n^k lớn nhất nếu k là số tự nhiên lớn nhất không vượt quá $\frac{n+1}{2}$.

Bài tập 4: Có bao nhiêu cách chọn một tập hợp 2 số nguyên dương nhỏ hơn 100 ?

Bài tập 5: Có bao nhiêu cách chọn một tập hợp 5 chữ từ bảng chữ cái tiếng Anh ?

Bài tập 6: Một tập hợp 10 phần tử có bao nhiêu tập con với số phần tử lẻ ?

Bài tập 7: Một tập hợp 100 phần tử có bao nhiêu tập con có nhiều hơn hai phần tử ?

Bài tập 8: Một đội bóng có 13 cầu thủ.

a. Có bao nhiêu cách chọn 10 cầu thủ để thi đấu?

b. Có bao nhiêu cách chọn 10 cầu thủ trong 13 cầu thủ của đội sao cho mỗi cầu thủ được phân công chơi ở một trong 10 vị trí đã định.

c. Trong 13 cầu thủ có 3 là nữ. Có bao nhiêu cách chọn 10 cầu thủ để thi đấu, nếu ít nhất có một cầu thủ là nữ ?

Bài tập 9: Một câu lạc bộ có 25 thành viên.

a. Có bao nhiêu cách chọn 4 thành viên vào ủy ban thường trực ?

b. Có bao nhiêu cách chọn chủ tịch, phó chủ tịch, thư ký và thủ quỹ ?

Bài tập 10: Một giáo sư soạn 40 câu hỏi đúng / sai về toán rời rạc, trong đó có 17 câu phải trả lời là đúng. Nếu thứ tự các câu hỏi có thể tuỳ ý, thì có bao nhiêu đáp án khác nhau?

Bài tập 11: Từ tập các số nguyên dương không vượt quá 100, có thể tạo được bao nhiêu chỉnh hợp chập 4 chứa 3 số nguyên liên tiếp

a. Theo trật tự thông thường và có thể bị phân cách bởi các số khác của chỉnh hợp ?

b. Tại những vị trí liên tiếp của chỉnh hợp ?

Bài tập 12: Tổ bộ môn toán học của một trường đại học có 7 cán bộ nữ và 9 cán bộ nam.

a. Có bao nhiêu cách chọn một hội đồng gồm 5 thành viên của tổ nếu trong hội đồng có ít nhất một là nữ ?

b. Có bao nhiêu cách chọn một hội đồng gồm 5 thành viên của tổ nếu trong hội đồng có ít nhất một là nữ và ít nhất một là nam ?

Bài tập 13: Giả sử một tổ bộ môn có 10 nam và 15 nữ. Có bao nhiêu cách chọn một hội đồng gồm 6 uỷ viên trong đó số uỷ viên nam bằng số uỷ viên nữ.

Bài tập 14: Một tổ bộ môn có 10 nam và 15 nữ. Có bao nhiêu cách chọn một hội đồng gồm 6 uỷ viên trong đó số uỷ viên nam ít hơn số uỷ viên nữ ?

Bài tập 15: Có bao nhiêu cách chọn 12 nước trong Liên hiệp quốc vào một hội đồng nếu 3 nước được bầu từ nhóm 45 nước, 4 nước được bầu từ nhóm 57 nước, các nước khác được bầu từ 69 nước còn lại ?

CHỦ ĐỀ 5

CÁC DẠNG BÀI TOÁN ĐẾM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Ở 4 chủ đề trước, chúng ta đã được làm quen với bài toán đếm dựa trên những kiến thức liên quan trực tiếp tới nội dung của chủ đề đó, cụ thể đó là thực hiện bài toán đếm dựa trên:

1. Quy tắc cộng, quy tắc nhân và nguyên lý bù trừ (cả trong trường hợp đơn lẫn kết hợp chúng với nhau).
2. Số hoán vị cùng với hai quy tắc đếm.
3. Số chỉnh hợp cùng với hai quy tắc đếm.
4. Số tổ hợp cùng với hai quy tắc đếm.

Trong chủ đề này, chúng ta quay lại với bài toán đếm xong thực hiện bài toán bằng việc lựa chọn một công cụ tối ưu nhất thuộc kiến thức của 4 chủ đề trước cũng như kết hợp chúng lại. Ngoài ra, nhiều ví dụ được thực hiện bằng nhiều cách khác nhau để các em học sinh tiện so sánh cũng như lựa chọn cho bản thân một phương pháp thích hợp.

II. CÁC DẠNG BÀI TOÁN ĐẾM

Bài toán 1: Đếm số các số hình thành từ tập A.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng:

- Mô phỏng số trong tập hợp số.
- Các định nghĩa hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp.
- Các quy tắc đếm cơ bản.

Ví dụ 1: Cho tập E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Tìm số các số tự nhiên gồm 5 chữ số lấy từ 7 số trên sao cho:

a. Các chữ số đều khác nhau.
b. Chữ số đầu tiên là chữ số 3.
c. Không tận cùng bằng chữ số 4.

Giải.

Một số 5 chữ số được ký hiệu:

$$\alpha = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}\text{, với } a_i \in E \text{ và } i = \overline{1,5}$$

a. Có thể tiếp cận theo một trong hai cách:

Cách 1: Thực hiện việc lựa chọn dần:

- a_1 được chọn từ tập E – có 7 phần tử

  ⇒ có 7 cách chọn.

- a_2 được chọn từ tập $E\backslash\{a_1\}$ – có 6 phần tử

  ⇒ có 6 cách chọn.
- a_3 được chọn từ tập $E\backslash\{a_1, a_2\}$ – có 5 phần tử

  ⇒ có 5 cách chọn.
- a_4 được chọn từ tập $E\backslash\{a_1, a_2, a_3\}$ – có 4 phần tử

  ⇒ có 4 cách chọn.
- a_5 được chọn từ tập $E\backslash\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ – có 3 phần tử

  ⇒ có 3 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, số các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, bằng:

$7.6.5.4.3 = 2520$ số.

Cách 2 (*Sử dụng định nghĩa chỉnh hợp*): Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số phân biệt hình thành từ E bằng

$$A_7^5 = 2520.$$

b. Ta có:

- $a_1 = 3$ ⇒ có 1 cách chọn.
- a_2, a_3, a_4, a_5 đều được chọn từ E do đó mỗi phần tử có 7 cách chọn.

Vậy, số các số tự nhiên gồm 5 chữ số bắt đầu bằng chữ số 3 hình thành từ E bằng

$1.7.7.7.7 = 2401$.

c. Ta có:

- $a_5 \in E\backslash\{4\}$ ⇒ có 6 cách chọn.
- a_1, a_2, a_3, a_4 đều được chọn từ E do đó mỗi phần tử có 7cách chọn.

Vậy, số các số tự nhiên gồm 5 chữ số bắt đầu bằng chữ số 3 hình thành từ E bằng

$6.7.7.7.7 = 14406$ số.

Ví dụ 2: Với tập $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt và

a. Là số chẵn.

b. Trong đó có chữ số 7.

c. Trong đó có chữ số 7 và chữ số hàng ngàn luôn là chữ số 1.

Giải

Một số 5 chữ số được ký hiệu:

$$\alpha = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}\text{, với } a_i \in E \text{ và } i = \overline{1,5}$$

a. Số α chẵn, ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Thực hiện việc lựa chọn dần:

- a_5 được chọn từ tập $F = \{2, 4, 6\}$

  ⇒ có 3 cách chọn.

- a_4 được chọn từ tập $E\setminus\{a_5\}$ – có 6 phần tử

  ⇒ có 6 cách chọn.
- a_3 được chọn từ tập $E\setminus\{a_5, a_4\}$ – có 5 phần tử

  ⇒ có 5 cách chọn.
- a_2 được chọn từ tập $E\setminus\{a_5, a_4, a_3\}$ – có 4 phần tử

  ⇒ có 4 cách chọn.
- a_1 được chọn từ tập $E\setminus\{a_5, a_4, a_3, a_2\}$ – có 3 phần tử

  ⇒ có 3 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, số các số chẵn gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, bằng:

$3.6.5.4.3 = 1080$ số.

Cách 2: Sử dụng kiến thức về hoán vị:

- a_5 được chọn từ tập $F = \{2, 4, 6\}$

  ⇒ có 3 cách chọn.
- a_1, a_2, a_3, a_4 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E\setminus\{a_5\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 6 chập 4

  ⇒ có A_6^4 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, số các số chẵn gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, bằng:

$3.\ A_6^4 = 1080$ số.

b. Muốn số α có chữ số 7, ta có thể tiến hành theo hai bước sau:

Bước 1: Chọn 1 vị trí trong 5 vị trí của các chữ số, để đặt chữ số 7

⇒ Có 5 cách chọn.

Bước 2: Bốn vị trí còn lại nhận giá trị là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E\setminus\{7\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 6 chập 4

⇒ Có A_6^4 cách chọn.

Vậy, số các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, trong đó có chữ số 7, bằng:

$5.\ A_6^4 = 1800$ số.

c. Muốn số α có chữ số 7 và chữ số hàng ngàn là chữ số 1, ta có thể tiến hành theo hai bước sau:

Bước 1: Gán $a_2 = 1$ ⇒ Có 1 cách chọn.

Bước 2: Chọn 1 vị trí trong 4 vị trí của các chữ số, để đặt chữ số 7

⇒ Có 4 cách chọn.

Bước 3: Ba vị trí còn lại nhận giá trị là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E\setminus\{7, 1\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 5 chập 3

⇒ Có A_5^3 cách chọn.

Vậy, số các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, trong đó có chữ số 7 và chữ số hàng ngàn là chữ số 1, bằng:

$1.4.\ A_5^3 = 240$ số.

Ví dụ 3: Với 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số:

a. Phân biệt.

b. Không bắt đầu bằng chữ số 1.

c. Không bắt đầu bằng 123.

Giải

Đặt E = {1, 2, 3, 4, 5}.

a. Gọi A là tập các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ E

Ta có ngay, mỗi số thuộc A ứng với chỉ một hoán vị 5 chữ số của tập E và ngược lại, vì vậy:

$$|A| = P_5 = 5! = 120 \text{ số}.$$

b. Với tập A như câu a).

Gọi A_1 là tập các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và bắt đầu bằng chữ số 1, suy ra:

- $A_1 \subset A$.
- $|A_1| = P_4 = 4! = 24$ số.

Gọi A_2 là tập các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và không bắt đầu bằng chữ số 1, suy ra:

$A_2 \subset A$.

$A = A_1 \cup A_2$ và $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

Theo quy tắc cộng:

$$|A| = |A_1| + |A_2| \Leftrightarrow |A_2| = |A| - |A_1| = 120 - 24 = 96 \text{ số}.$$

c. Với tập A như câu a).

Gọi B_1 là tập các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và bắt đầu bằng 123, suy ra:

- $B_1 \subset A$.
- $|B_1| = P_2 = 2! = 2$ số.

Gọi B_2 là tập các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và không bắt đầu bằng 123, suy ra:

$B_2 \subset A$.

$A = B_1 \cup B_2$ và $B_1 \cap B_2 = \varnothing$.

Theo quy tắc cộng:

$$|A| = |B_1| + |B_2| \Leftrightarrow |B_2| = |A| - |B_1| = 120 - 2 = 118 \text{ số}.$$

Ví dụ 4: Với 5 chữ số 1, 2, 5, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số phân biệt và thoả mãn điều kiện:

a. Là một số chẵn.

b. Là một số nhỏ hơn hoặc bằng 278.

c. Là một số chẵn và nhỏ hơn hoặc bằng 278.

Giải.

Đặt E = {1, 2, 5, 7, 8}.

Một số 3 chữ số được ký hiệu:

$$\alpha = \overline{a_1a_2a_3}, \text{ với } a_i \in E \text{ và } i = \overline{1,3}$$

a. Số α chẵn, ta có:

- a_3 được chọn từ tập F = {2, 8}

  $\Rightarrow$ có 2 cách chọn.

- a_1, a_2 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E\setminus\{a_3\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 4 chập 2

  $\Rightarrow$ có A_4^2 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, số các số chẵn gồm 3 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, bằng:

$2.A_4^2 = 24$ số.

b. Số α nhỏ hơn hoặc bằng 278, ta có $a_1 \in \{1, 2\}$

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a_1 = 1$

$\Rightarrow$ Có 1 cách chọn.

- a_2, a_3 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E\setminus\{1\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 4 chập 2

  $\Rightarrow$ có A_4^2 cách chọn.

Vậy, trong trường hợp này ta nhận được:

$1.A_4^2 = 12$ số.

Trường hợp 2: Nếu $a_1 = 2$

$\Rightarrow$ Có 1 cách chọn.

- a_2 được chọn từ tập $F = E\setminus\{2, 8\}$

  $\Rightarrow$ có 3 cách chọn.

- a_3 được chọn từ tập $G = E\setminus\{2, a_2\}$

  $\Rightarrow$ có 3 cách chọn.

Vậy, trong trường hợp này ta nhận được:

$1.3.3 = 9$ số.

Vậy, số các số gồm 3 chữ số phân biệt nhỏ hơn 278, hình thành từ tập E, bằng:

$12 + 9 = 21$ số.

Cách 2: Ta có:

- Gọi B là tập các số gồm 3 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và nhỏ hơn hoặc bằng 278.
- Gọi B_1 là tập các số gồm 3 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và bắt đầu bằng chữ số 1, suy ra

  $B_1 \subset B$ và $|B_1| = A_4^2 = 12$.

- Gọi B_2 là tập các số gồm 3 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và bắt đầu bằng chữ số 2, suy ra

  $B_2 \subset B$ và $|B_2| = A_4^2 = 12$.

- Gọi B_3 là tập các số gồm 3 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và bắt đầu bằng 28, suy ra $B_3 \subset B_2$ và các phần tử thuộc B_3 là 281, 285, 287.

Ta có

$B = B_1 \cup (B_2\setminus B_3)$ và $B_1 \cap (B_2\setminus B_3) = \varnothing$.

Theo quy tắc cộng:

$|B| = |B_1| + |B_2\setminus B_3| = |B_1| + |B_2| - |B_3| = 21$ số.

c. Số α là số chẵn nhỏ hơn hoặc bằng 278, ta có $a_1 \in \{1, 2\}$ và $a_3 \in \{2, 8\}$

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a_1 = 1$

$\Rightarrow$ Có 1 cách chọn.

- a_3 được chọn từ tập $F = \{2, 8\}$

  $\Rightarrow$ có 2 cách chọn.
- a_2 được chọn từ tập $G = E \backslash \{1, a_3\}$

  $\Rightarrow$ có 3 cách chọn.

Vậy, trong trường hợp này ta nhận được:

$1.2.3 = 6$ số.

Trường hợp 2: Nếu $a_1 = 2$

$\Rightarrow$ Có 1 cách chọn.

- $a_2 = 8 \Rightarrow$ có 1 cách chọn.
- a_3 được chọn từ tập $H = E \backslash \{2, 8\}$

  $\Rightarrow$ có 3 cách chọn.

Vậy, trong trường hợp này ta nhận được:

$1.1.3 = 3$ số.

Vậy, số các số gồm 3 chữ số phân biệt nhỏ hơn 278, hình thành từ tập E, bằng:

$6 + 3 = 9$ số.

Cách 2: Ta có:

- Gọi C là tập các số chẵn gồm 3 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và nhỏ hơn hoặc bằng 278.
- Gọi $C_{1,2}$ là tập các số gồm 3 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và bắt đầu bằng chữ số 1, và tận cùng bằng chữ số 2, suy ra

  $$C_{1,2} \subset C \text{ và } |C_{1,2}| = 3.$$
- Gọi $C_{1,8}$ là tập các số gồm 3 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và bắt đầu bằng chữ số 1, và tận cùng bằng chữ số 8, suy ra

  $$C_{1,8} \subset C \text{ và } |C_{1,8}| = 3.$$
- Gọi $C_{2,8}$ là tập các số gồm 3 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và bắt đầu bằng chữ số 2, và tận cùng bằng chữ số 8, suy ra

  $$C_{2,8} \subset C \text{ và } |C_{2,8}| = 3.$$

Ta có:

$C = C_{1,2} \cup C_{1,8} \cup C_{2,8}$ và $C_{1,2}$, $C_{1,8}$, $C_{2,8}$ đôi một không giao nhau.

Theo quy tắc cộng:

$|C| = |C_{1,2}| + |B_{1,8}| + |C_{2,8}| = 9$ số.

Chú ý: Chúng ta đều biết rằng một số:

$$\alpha = \overline{a_1 a_2 \ldots},$$

chỉ có nghĩa khi $a_1 \neq 0$.

Do đó trong trường hợp $0 \in E$ chúng ta cần xét các trường hợp riêng.

Ví dụ 5: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số trong đó hai chữ số kề nhau phải khác nhau.

Giải

Đặt $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Một số 5 chữ số được ký hiệu:

$$\alpha = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}, \text{ với } a_i \in E,\ i = \overline{1,5} \text{ và } a_1 \neq 0.$$

Ta có:

- a_1 được chọn từ tập $E\backslash\{0\}$ $\Rightarrow$ Có 9 cách chọn.
- a_2 được chọn từ tập $E\backslash\{a_1\}$ $\Rightarrow$ Có 9 cách chọn.
- a_3 được chọn từ tập $E\backslash\{a_2\}$ $\Rightarrow$ Có 9 cách chọn.
- a_4 được chọn từ tập $E\backslash\{a_3\}$ $\Rightarrow$ Có 9 cách chọn.
- a_5 được chọn từ tập $E\backslash\{a_4\}$ $\Rightarrow$ Có 9 cách chọn.

Vậy, số các số thoả mãn điều kiện đầu bài bằng:

$$9.9.9.9.9 = 59049 \text{ số.}$$

Ví dụ 6: Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, ta có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số và trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, còn mỗi số khác nhau có mặt đúng một lần.

Giải

Bộ (0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5) sẽ tạo ra được các số có 8 chữ số dạng:

$$\alpha = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}\text{, với } a_1 \neq 0$$

từ đó suy ra:

- a_1 có 7 cách chọn.
- a_2, ..., a_8 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ 7 chữ số còn lại do đó nó là một hoán vị của 7 phần tử, nhưng vì có 3 số 1 nên sẽ bị lặp lại 3! lần

$$\Rightarrow \text{Có } \frac{7!}{3!} \text{ cách chọn.}$$

Vậy, số các số thoả mãn điều kiện đầu bài bằng:

$$7.\frac{7!}{3!} = 5880 \text{ số.}$$

Ví dụ 7: Với tập E = {0, 1, 2, 3, 4, 5} có thể lập được bao nhiêu

a. Số gồm 5 chữ số phân biệt.

b. Số chẵn gồm 5 chữ số phân biệt.

c. Số gồm 5 chữ số phân biệt, trong đó có chữ số 0.

Giải

Một số 5 chữ số được ký hiệu:

$$\alpha = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}\text{, với } a_i \in E,\ i = \overline{1,5} \text{ và } a_1 \neq 0.$$

a. Ta có:

- a_1 được chọn từ tập $E\backslash\{0\}$

  $\Rightarrow$ Có 5 cách chọn.
- a_2, a_3, a_4, a_5 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E\backslash\{a_1\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 5 chập 4

  $\Rightarrow$ Có A_5^4 cách chọn.

Vậy, số các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, bằng:

$$5.A_5^4 = 600 \text{ số.}$$

b. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a_5 = 0$

$\Rightarrow$ Có 1 cách chọn.

Khi đó a_1, a_2, a_3, a_4 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E\backslash\{0\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 5 chập 4

$\Rightarrow$ Có A_5^4 cách chọn.

Vậy, trong trường hợp này chúng ta nhận được:

$1.A_5^4 = 120$ số.

Trường hợp 2: Nếu a_5 được chọn từ tập $\{2, 4\}$

$\Rightarrow$ Có 2 cách chọn.

- a_1 được chọn từ tập $E\backslash\{0, a_5\}$

  $\Rightarrow$ Có 4 cách chọn.

- a_2, a_3, a_4 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E\backslash\{a_1, a_5\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 4 chập 3

  $\Rightarrow$ Có A_4^3 cách chọn.

Vậy, trong trường hợp này chúng ta nhận được:

$2.4.A_4^3 = 192$ số.

Vậy, số các số chẵn gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, bằng:

$120 + 192 = 312$ số.

c. Ta có lập luận:

- Gọi B là tập các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ E. Theo a) ta có:

  $|B| = 600.$

- Gọi B_1 là tập các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ E, trong đó không có chữ số 0, suy ra

  $B_1 \subset B$ và $|B_1| = P_5 = 5! = 120$ số.

Khi đó $\overline{B_1} = B\backslash B_1$ là tập các số gồm 5 chữ số khác nhau, hình thành từ tập E, trong đó có chữ số 0. Ta được:

$|\overline{B_1}| = |B\backslash B_1| = |B| - |B_1| = 480$ số.

Ví dụ 8: Cho tập hợp $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau đôi một lấy từ E trong mỗi trường hợp sau:

a. Là số chẵn.

b. Một trong 3 chữ số đầu tiên phải bằng 1.

Giải

Một số 5 chữ số được ký hiệu:

$$\alpha = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}, \text{ với } a_i \in E, i = \overline{1,5} \text{ và } a_1 \neq 0.$$

a. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a_5 = 0$

$\Rightarrow$ Có 1 cách chọn.

- a_1, a_2, a_3, a_4 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E\setminus\{0\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 7 chập 4

  $\Rightarrow$ Có A_7^4 cách chọn.

Vậy, trong trường hợp này chúng ta nhận được:

$1.A_7^4 = 840$ số.

Trường hợp 2: Nếu a_5 được chọn từ tập $\{2, 4, 6\}$

$\Rightarrow$ Có 3 cách chọn.

- a_1 được chọn từ tập $E\setminus\{0, a_5\}$

  $\Rightarrow$ Có 6 cách chọn.

- a_2, a_3, a_4 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E\setminus\{a_1, a_5\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 6 chập 3

  $\Rightarrow$ Có A_6^3 cách chọn.

Vậy, trong trường hợp này chúng ta nhận được:

$3.6.A_6^3 = 2160$ số.

Vậy, số các số chẵn gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, bằng:

$840 + 2160 = 3000$ số.

b. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a_1 = 1$

$\Rightarrow$ Có 1 cách chọn.

- a_2, a_3, a_4, a_5 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E\setminus\{1\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 7 chập 4

  $\Rightarrow$ Có A_7^4 cách chọn.

Vậy, trong trường hợp này chúng ta nhận được:

$1.A_7^4 = 840$ số.

Trường hợp 2: Nếu $a_2 = 1$ hoặc $a_3 = 1$

$\Rightarrow$ Có 2 cách chọn.

- a_1 được chọn từ tập $E\setminus\{0, 1\}$

  $\Rightarrow$ Có 6 cách chọn.

- a_3, a_4, a_5 (hoặc a_2, a_4, a_5) là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E\setminus\{a_1, a_2\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 6 chập 3

  $\Rightarrow$ Có A_6^3 cách chọn.

Vậy, trong trường hợp này chúng ta nhận được:

$2.6.A_6^3 = 1440$ số.

Vậy, số các số thoả mãn điều kiện đầu bài bằng:

$840 + 1440 = 2280$ số.

Ví dụ 9: Cho tập các chữ số $E = \{1, 2, ..., n\}$. Có thể lập được bao nhiêu số gồm n chữ số phân biệt sao cho các chữ số 1 và 2 không đứng cạnh nhau ?

Giải

Ta có lập luận:

- Gọi A là tập các số gồm n chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, suy ra
  $$|A| = P_n = n!.$$
- Gọi B là tập các số gồm n chữ số phân biệt sao cho các chữ số 1 và 2 đứng cạnh nhau. Để tính $|B|$ ta tiến hành theo hai bước sau:

  Bước 1: Chọn một bộ $n - 1$ phần tử từ tập $F = \{\alpha, 3, 4, ..., n\}$, trong đó $\alpha = (1, 2)$.

  $\Rightarrow$ Có P_{n-1} cách chọn.

  Bước 2: Chọn một hoán vị các phần tử của α

  $\Rightarrow$ Có P_2 cách chọn.

  Vậy:
  $$|B| = P_{n-1}.P_2 = 2.(n-1)!.$$

Ta có:

$\overline{B} = A \backslash B$ là tập các số gồm n chữ số phân biệt sao cho các chữ số 1 và 2 đứng cạnh nhau. Ta được:

$$|\overline{B}| = |A\backslash B| = |A| - |B| = n! - 2.(n-1)! = (n-2).(n-1)! \text{ cách.}$$

Ví dụ 10: Với 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt và thoả mãn điều kiện:

- Mỗi số nhỏ hơn 40000.
- Mỗi số nhỏ hơn 45000.

Giải

Đặt $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Một số 5 chữ số được ký hiệu:

$$\alpha = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}, \text{ với } a_i \in E, i = \overline{1,5}.$$

a. Ta có thể lựa chọn hai cách trình bày sau:

Cách 1: Ta có:

- Vì α nhỏ hơn 40000 nên $a_1 \in \{1, 2, 3\}$

  $\Rightarrow$ Có 3 cách chọn.
- a_2, a_3, a_4, a_5 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E\backslash\{a_1\}$ do đó nó là một hoán vị của 4 phần tử

  $\Rightarrow$ có P_4 cách chọn.

Vậy, số các số gồm 5 chữ số phân biệt nhỏ hơn 40000, hình thành từ tập E, bằng:

$3.P_4 = 72$ số.

Cách 2: Gọi A là tập các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và mỗi số nhỏ hơn 40000.

- Gọi A_1 là tập các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và bắt đầu bằng chữ số 1, suy ra:
  $$A_1 \subset A \text{ và } |A_1| = P_4 = 24.$$

- Gọi A_2 là tập các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và bắt đầu bằng chữ số 2, suy ra:

  $A_2 \subset A$ và $|A_2| = P_4 = 24$

- Gọi A_3 là tập các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và bắt đầu bằng chữ số 3, suy ra:

  $A_3 \subset A$ và $|A_3| = P_4 = 24$

Ta có:

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ và A_1, A_2, A_3 đôi một không giao nhau.

Theo quy tắc cộng:

$|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 3.24 = 72$ số.

b. Vì α nhỏ hơn 45000 nên $a_1 \in \{1, 2, 3, 4\}$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a_1 \in \{1, 2, 3\}$

$\Rightarrow$ Có 3 cách chọn.

- a_2, a_3, a_4, a_5 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E \backslash \{a_1\}$ do đó nó là một hoán vị của 4 phần tử

  $\Rightarrow$ có P_4 cách chọn.

Vậy, trong trường hợp này ta được:

$3.P_4 = 72$ số.

Trường hợp 2: Nếu $a_1 = 4$

$\Rightarrow$ có 1 cách chọn.

- $a_2 \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow$ có 3 cách chọn.
- a_3, a_4, a_5 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E \backslash \{a_1, a_2\}$ do đó nó là một hoán vị của 3 phần tử

  $\Rightarrow$ có P_3 cách chọn.

Vậy, trong trường hợp này ta được:

$1.3.P_3 = 18$ số.

Vậy, số các số gồm 5 chữ số phân biệt nhỏ hơn 45000, hình thành từ tập E, bằng:

$72 + 18 = 90$ số.

Ví dụ 11: Có bao nhiêu số lẻ có 6 chữ số chia hết cho 9.

Giải

Nhận xét rằng:

- Các số có 6 chữ số chia hết cho 9 là:

  100008, 100017, 100026, 100035,...,999999

- Các số lẻ có 6 chữ số chia hết cho 9 lập thành một cấp số cộng với:

  $u_1 = 100017$, $u_n = 999999$ và $d = 18$

Do đó:

$100017 + (n - 1).18 = 999999 \Leftrightarrow n = 50000.$

Vậy, có 50000 số lẻ có 6 chữ số chia hết cho 9 .

Ví dụ 12: Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số sao cho tổng các chữ số của mỗi số là một số lẻ.

Giải

Xét số có 5 chữ số $\alpha = \overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5}$, để α có tổng các chữ số là một số lẻ, có hai khả năng xảy ra:

- Nếu $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$ chẵn thì $\alpha_5 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
- Nếu $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$ lẻ thì $\alpha_5 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Mặt khác, số các số có 4 chữ số $\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ bằng $9.10.10.10 = 9.10^3$ và mỗi số đó sinh 5 số có 5 chữ số mà tổng các chữ số là một số lẻ.

Vậy có tất cả:

$5.\,9.10^3 = 45000$ số.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho 4 chữ số 1, 2, 3, 4.

a. Có thể lập được bao nhiêu số hàng nghìn gồm 4 chữ số khác nhau từ 4 số đó.

b. Tính tổng các số tìm được ở câu a).

Bài tập 2: Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, ta có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau và trong đó phải có mặt chữ số 5.

Bài tập 3: Cho các chữ số 0, 2, 4, 5, 6, 8, 9. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số:

a. Có 3 chữ số mà trong mỗi số các chữ số khác nhau.

b. Có 4 chữ số khác nhau và có chữ số 5.

Bài tập 4: Từ các chữ số 0, 1, 3, 5, 7 có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5.

Bài tập 5: Viết các số có 6 chữ số từ 1, 2, 3, 4, 5 như sau: trong mỗi số có 1 chữ số xuất hiện 2 lần còn các số còn lại xuất hiện 1 lần. Hỏi có bao nhiêu số như vậy.

Bài tập 6: Cho 8 chữ số 0, 1, ..., 7. Từ 8 chữ số trên lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm 4 chữ số, đôi một khác nhau và không chia hết cho 10.

Bài tập 7: Có bao nhiêu số khác nhau gồm 7 chữ số sao cho tổng các chữ số của mỗi số là 1 số chẵn.

Bài tập 8: Từ 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được:

a. Bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau.

b. Bao nhiêu số chia hết cho 5 có 3 chữ số khác nhau.

c. Bao nhiêu số chia hết cho 9 có 3 chữ số khác nhau.

Bài tập 9: Có 5 miếng bìa ghi một trong 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Lấy 3 miếng từ 5 miếng bìa đặt lần lượt cạnh nhau từ trái sang phải được số gồm 3 chữ số. Có thể lập được bao nhiêu số có nghĩa gồm 3 chữ số và trong đó có bao nhiêu số chẵn ?

Bài tập 10: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được:

a. Bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 4 chữ số đôi một khác nhau.

b. Bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 3.

Bài tập 11: Từ 7 chữ số 0, 1,..., 6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau.

Bài tập 12: Cho 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Từ 5 chữ số đó có thể lập được bao nhiêu số chẵn có năm chữ số sao cho trong mỗi số đó mỗi chữ số trên có mặt một lần.

Bài tập 13: Hỏi từ 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập thành bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau, sao cho trong các số đó có mặt chữ số 0 và 1.

Bài tập 14: Xét những số gồm 9 chữ số, trong đó có 5 chữ số 1 và 4 chữ số còn lại là 2, 3, 4, 5. Hỏi có bao nhiêu số như thế nếu:

a. Năm chữ số 1 được xếp kề nhau.

b. Các chữ số được xếp tuỳ ý.

Bài tập 15: Tìm tất cả các số tự nhiên có đúng 5 chữ số sao cho trong mỗi số đó chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước.

Bài toán 2: Đếm số phương án.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng phép mô hình hoá cùng các quy tắc đếm cơ bản.

Ví dụ 1: Trong 100 vé số có 2 vé trúng thưởng. Nếu mua 12 vé số thì có bao nhiêu trường hợp:

a. Không vé nào trúng thưởng ?

b. Có ít nhất một vé trúng thưởng ?

c. Có đúng một vé trúng thưởng ?

Giải

Trong 100 vé số có 2 vé trúng thưởng còn 98 vé không trúng thưởng.

Gọi A là tập các bộ 12 vé số trong bộ 100 chiếc, suy ra

$$|A| = C_{100}^{12}.$$

a. Gọi A_1 là tập các bộ vé số không vé nào trúng thưởng, suy ra

$$|A_1| = C_{98}^{12}.$$

b. Ta có $\overline{A_1} = A \backslash A_1$ là tập các bộ vé số, có ít nhất một vé trúng thưởng. Ta được:

$$|\overline{A_1}| = |A \backslash A_1| = |A| - |A_1| = C_{100}^{12} - C_{98}^{12}.$$

c. Số các bộ 12 vé, có đúng một vé trúng thưởng bằng:

$$C_2^1 . C_{98}^{11}.$$

Ví dụ 2: Người ta muốn thành lập một tổ công tác gồm 3 nữ và 4 nam, 3 nữ có thể chọn trong 10 nữ, còn 4 nam có thể chọn trong 7 nam, trong đó có anh Bình và chị An.

a. Có bao nhiêu cách thành lập tổ ?

b. Có bao nhiêu cách thành lập tổ mà anh Bình và chị An không ở cùng một tổ ?

Giải

a. Muốn thành lập tổ công tác, có thể tiến hành theo hai bước sau:

Bước 1: Chọn 3 nữ trong 10 nữ

$\Rightarrow$ Có C_{10}^3 cách chọn.

Bước 2: Chọn 4 nam trong 7 nam

$\Rightarrow$ Có C_7^4 cách chọn.

Vậy số cách chọn tổ bằng:

$C_{10}^3 . C_7^4 = 4200$ cách.

b. Gọi A là số cách thành lập tổ, ta có:

$|A| = 4200.$

Gọi B là tập các cách thành lập tổ mà anh Bình và chị An ở cùng một tổ, suy ra $B \subset A$. Muốn tính $|B|$ ta tiến hành theo hai bước sau:

Bước 1: Chọn 2 nữ trong 9 nữ (vì đã có chị An)

$\Rightarrow$ Có C_9^2 cách chọn.

Bước 2: Chọn 3 nam trong 6 nam (vì đã có anh Bình)

$\Rightarrow$ Có C_6^3 cách chọn.

Vậy:

$|B| = C_9^2 . C_6^3 = 720$ cách.

Ta có $\overline{B} = A \backslash B$ là tập các cách thành lập tổ mà anh Bình và chị An không ở cùng một tổ. Ta được:

$|\overline{B}| = |A \backslash B| = |A| - |B| = 3480$ cách.

Ví dụ 3: Người ta muốn phân loại một thế hệ thanh niên theo giới tính (nam hoặc nữ), theo tình trạng hôn nhân (đã lập gia đình hoặc chưa lập gia đình), và theo nghề nghiệp (17 nghề nghiệp trong xã hội). Có bao nhiêu cách phân loại khác nhau ?

Giải

Mỗi cách phân loại ứng với một bộ ba phần tử (x_i, y_j, z_k), trong đó:

- x_i là phần tử của tập E = { nam và nữ }
- y_j là phần tử của tập F = {đã lập gia đình, chưa lập gia đình}.
- z_k là phần tử của tập K, gồm 17 phần tử về nghề nghiệp trong xã hội.

Vậy, mỗi bộ (x_i, y_j, z_k) là phần tử của tích Đềcác $E \times F \times K$.

Vậy số cách phân loại bằng:

$|E \times F \times K| = |E| \times |F| \times |K| = 2.2.17 = 68$ cách.

Ví dụ 4: Gieo 1 con xúc xắc 6 mặt k lần.

a. Có bao nhiêu kết quả khác nhau ?

b. Có bao nhiêu kết quả, trong đó mặt 1 điểm không lần nào xuất hiện ?

Giải

Đặt E = { 1, 2, 3, 4, 5 } là tập các số điểm trên 6 mặt xúc xắc.

a. Một kết quả của k lần gieo con xúc xắc ứng với một bộ $(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_k)$ có k phần tử, trong đó $\alpha_i \in E$, $i = \overline{1,k}$, α_i chỉ số điểm trên mặt xúc xắc ở lần gieo thứ i.

Vậy, mỗi bộ $(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_k)$ là phần tử của tích Đềcác $\underbrace{E \times ... \times E}_{\text{k lan}} = E^{(k)}$.

Vậy số cách phân loại bằng:

$|E^{(k)}| = |E|^k = 6^k$ cách.

b. Một kết quả của k lần gieo con xúc xắc, trong đó mặt 1 điểm không lần nào xuất hiện, ứng với một bộ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k)$ có k phần tử, trong đó $\alpha_i \in E_1 = E \setminus \{1\}$, $i = \overline{1,k}$, α_i chỉ số điểm trên mặt xúc xắc ở lần gieo thứ i.

Vậy, mỗi bộ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k)$ là phần tử của tích Đêcác $\underbrace{E_1 \times \ldots \times E_1}_{\text{k lần}} = E_1^{(k)}$.

Vậy số cách phân loại bằng:

$$|E_1^{(k)}| = |E_1|^k = 5^k \text{ cách.}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Người ta muốn tổ chức một thí nghiệm nông nghiệp trên ba yếu tố: giống lúa (có 3 loại giống), phân bón (có 2 loại phân bón) và chế độ tưới nước (có 3 chế độ). Có bao nhiêu cách bố trí thí nghiệm ?

Bài tập 2: Một đội văn nghệ gồm 10 học sinh nữ và 10 học sinh nam. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người sao cho:

a. Có đúng 2 nam trong 5 người đó.

b. Có ít nhất 2 nam và ít nhất 1 nữ.

Bài tập 3: Có 12 chiếc bánh ngọt khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chúng vào 6 chiếc hộp giống nhau, mỗi chiếc hộp có 2 chiếc bánh.

Bài tập 4: Một tổ sinh viên có 20 em, trong đó có 8 em chỉ biết tiếng Anh, 7 em chỉ biết tiếng Pháp, 5 em chỉ biết tiếng Đức. Cần lập một nhóm đi thực tế gồm 3 em biết tiếng Anh, 4 em biết tiếng Pháp, 2 em biết tiếng Đức. Hỏi có bao nhiêu cách lập nhóm.

Bài tập 5: Một tổ học sinh gồm 10 người trong đó có 2 nữ, 8 nam ngồi vào 10 chiếc ghế đặt quanh một bàn tròn. Hỏi:

a. Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi khác nhau.

b. Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi khác nhau để hai bạn nữ ngồi cạnh nhau.

Bài tập 6: Có 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lý nam. Lập một đoàn công tác có 3 người cần có cả nam và nữ, cần có cả nhà toán học và nhà vật lý. Hỏi có bao nhiêu cách.

Bài tập 7: Nam được tặng 1 bó hoa có 8 hồng nhung và 6 hồng bạch. Nam muốn chọn ra 10 bông sao cho có nhiều nhất 6 bông hồng nhung và ít nhất 3 bông hồng bạch. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Bài tập 8: Xếp 3 bi đỏ có bán kính khác nhau và ba bi xanh giống nhau vào một dãy 7 ô trống.

a. Hỏi có mấy cách xếp khác nhau.

b. Có bao nhiêu cách xếp khác nhau sao cho 3 bi đỏ xếp cạnh nhau và 3 bi xanh xếp cạnh nhau.

Bài tập 9: Một đồn cảnh sát khu vực có 9 người. Trong ngày cần cử 3 người làm nhiệm vụ ở địa điểm A, 2 người làm nhiệm vụ ở địa điểm B, 4 người ở lại trực đồn. Hỏi có bao nhiêu cách phân công.

Bài tập 10: Cho 100000 chiếc vé được đánh số từ 00000 đến 99999. Hỏi các vé gồm 5 chữ số khác nhau là bao nhiêu.

Bài tập 11: Một hộp đựng 6 quả cầu xanh đánh số từ 1 đến 6; 5 quả cầu đỏ đánh số từ 1 đến 5; 4 quả cầu vàng đánh số từ 1 đến 4.

a. Có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu cùng màu ? 3 quả cầu cùng số ?

b. Có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu khác màu ? 3 quả cầu khác màu và khác số ?

Bài tập 12: Một đoàn tàu có 3 toa I, II, III. Sân ga có 4 hành khách chuẩn bị đi tàu, có ít nhất 4 chỗ trống.

a. Có mấy cách xếp 4 khách lên 3 toa.

b. Có mấy cách xếp 4 khách lên tàu có 1 toa có 3 trong 4 vị khách trên.

Bài tập 13: Có n học sinh nam và n học sinh nữ ngồi quanh một bàn tròn. Có bao nhiêu cách xếp để không có 2 học sinh cùng giới ngồi cạnh nhau.

Bài tập 14: Có bao nhiêu cách xếp 5 học sinh A, B, C, D, E vào một chiếc ghế dài sao cho:

a. Bạn C ngồi chính giữa.

b. Bạn A, E ngồi ở hai đầu ghế.

Bài toán 3: Các bài toán khác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Dựa trên tư duy phân tích.

Ví dụ 1: Số 210 có bao nhiêu ước số.

Giải

Phân tích 210 ra thừa số nguyên tố:

$$210 = 2.3.5.7$$

Đặt $E = \{2, 3, 5, 7\}$.

Khi đó, từ E ta xây dựng được các ước số của 210 khác 1 .

Vậy, số ước số của 210 bằng số tập con của tập E, và bằng

$$2^4 = 16.$$

Tổng quát hoá: Để tìm số các ước của số A, ta thực hiện theo các bước sau:

Phân tích A ra thành tích thừa số nguyên tố:

$$A = p_1...p_k, \text{ với } p_i \neq 1, i = \overline{1,k} \text{ và đôi một khác nhau.}$$

Đặt tập $E = \{p_1, ..., p_k\}$.

Khi đó, từ E ta xây dựng được các ước số của A khác 1, do đó số ước số của A bằng số tập con của tập E, và bằng 2^k.

Chú ý: Bạn đọc sẽ thắc mắc tập con $\varnothing$ sẽ ứng với ước nào của A, câu trả lời là ứng với ước 1.

Ví dụ 2: Xét hoán vị của 3 chữ số 1, 2, 3, 4. Tính tổng S của tất cả các số tạo thành bởi hoán vị đó.

Giải

Đặt $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

Từ tập E có thể lập được:

$4! = 24$ số gồm 4 chữ số khác nhau.

Nhận xét rằng, các số 1, 2, 3, 4 xuất hiện ở các hàng đơn vị hàng chục, hàng trăm, hàng ngàn 6 lần, từ đó:

$$S = 10^3.6.(1 + 2 + 3 + 4) + 10^2.6.(1 + 2 + 3 + 4) + $$
$$+ 10.6.(1 + 2 + 3 + 4) + 6.(1 + 2 + 3 + 4)$$
$$= 66660.$$

Chú ý: Đề nghị bạn đọc đề xuất phương pháp thực hiện bài toán tổng quát.

Ví dụ 3: Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 xét tập hợp E gồm 7 chữ số khác nhau viết từ các số đã cho. Chứng minh rằng tổng S tất cả các số của tập E là chia hết cho 9.

Giải

Đặt E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

Từ tập E có thể lập được:

7! = 5040 số gồm 7 chữ số khác nhau.

Nhận xét rằng, các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 xuất hiện ở các hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm, hàng ngàn 720 lần, từ đó:

$$S = 10^6.720.(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) + ..$$
$$+ 10^0.720.(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)$$
$$= 720.28(10^6 + ... + 10^0)$$

suy ra S chia hết cho 9 bởi 720 chia hết cho 9.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Số 2310 có bao nhiêu ước số.

Bài tập 2: Số 1638 có bao nhiêu ước số.

Bài tập 3: Xem hoán vị của 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Tính tổng S của tất cả các số tạo thành bởi hoán vị đó.

CHỦ ĐỀ 6

CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIUTƠN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIUTƠN

Với mọi cặp số a, b và mọi số n nguyên dương, ta có:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n \qquad (1)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i}.b^i .$$

2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIUTƠN

1. Số các số hạng ở bên phải của công thức bằng n + 1, n là số mũ của nhị thức ở vế trái.
2. Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng n.
3. Số hạng tổng quát có dạng:

   $$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k,\ k = 0, 1, \dots, n.$$

   Đó là số hạng thứ k + 1 trong khai triển của nhị thức $(a+b)^n$.
4. Các hệ số nhị thức cách đều hai số hạng đầu và cuối bằng nhau vì:

   $$C_n^k = C_n^{n-k},\ 0 \le k \le n.$$

3. MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT

Dạng 1: Thay a = 1 và b = x vào (1), ta được:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n. \qquad (2)$$

Dạng 2: Thay a = 1 và b = – x vào (1), ta được:

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \dots + (-1)^k C_n^k x^k + \dots + (-1)^n C_n^n x^n. \qquad (3)$$

Khi đó:

- Thay x = 1 vào (2), ta được:

  $$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

- Thay x = 1 vào (3), ta được:

  $$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

4. TAM GIÁC PASCAL

Các hệ số của khai triển Niutơn của nhị thức $(a + b)^n$ có thể được sắp xếp thành tam giác sau đây (gọi là *tam giác Pascal*):

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n = 0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n = 1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n = 2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n = 3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n = 4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n = 5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n = 6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\ldots & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Như vậy, dựa vào bảng ta có:

$C_4^1 = C_4^3 = 4,\ C_4^2 = 6.$

$C_5^1 + C_5^2 = C_6^2$ (chúng ta đã từng được biết $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$).

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Khai triển nhị thức.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng kết quả:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + ... + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

trong đó các C_n^k, với $k = 0, 1, ..., n$ có giá trị được tính bằng công thức tổ hợp hoặc sử dụng tam giác Pascal.

Ví dụ 1: Thực hiện:

a. Khai triển $(1 + x)^{10}$.

b. So sánh hai số $(1,1)^{10}$ và 2.

Giải

a. Ta có:

$$(1 + x)^{10} = C_{10}^0 + C_{10}^1 x + C_{10}^2 x^2 + ... + C_{10}^{10} x^{10}.$$

Trong khai triển đó:

- Có 11 số hạng, do đó có 1 số hạng đứng giữa, đó là số hạng thứ 6.
- Các hệ số nhị thức đối xứng nhau qua số hạng thứ 6 của khai triển thì bằng nhau.

Do đó chỉ cần tìm các hệ số của 6 số hạng đầu của công thức khai triển. Đó là các hệ số:

$$C_{10}^0 = 1,\ C_{10}^1 = 10,\ C_{10}^2 = 45,\ C_{10}^3 = 120,\ C_{10}^4 = 210,\ C_{10}^5 = 252.$$

Vậy:

$$(1 + x)^{10} = 1 + 10x + 45x^2 + 120x^3 + 210x^4 + 252x^5 + 210x^6 + $$
$$+ 120x^7 + 45x^8 + 10x^9 + x^{10}.$$

b. Từ khai triển trên, với $x > 0$, suy ra:

$$(1 + x)^{10} > 1 + 10x.$$

từ đó, với $x = 0,1$, ta được:

$$(1,1)^{10} > 2.$$

Ví dụ 2: Thực hiện khai triển:

$$(3x - 4)^5.$$

Giải

Ta có:

$$(3x - 4)^5 = \sum_{i=0}^{5} C_5^i (3x)^{5-i}.(-4)^i = 3^5 C_5^0 x^5 - 4.3^4 C_5^1 x^4 + \dots - 4^5 C_5^5$$

trong khai triển đó:

- Có 6 số hạng.
- Các hệ số nhị thức đối xứng nhau qua số hạng thứ 6 của khai triển thì bằng nhau.

Do đó chỉ cần tìm các hệ số của 3 số hạng đầu của công thức khai triển. Đó là các hệ số:

$$C_5^0 = 1,\ C_5^1 = 5,\ C_5^2 = 10.$$

Vậy:

$$(3x - 4)^5 = 243x^5 - 1620x^4 + 4320x^3 - 5760x^2 + 3840x - 1024.$$

Ví dụ 3: Thực hiện khai triển:

$$\left(x + \frac{1}{2x}\right)^8.$$

Giải

Ta có:

$$\left(x + \frac{1}{2x}\right)^8 = C_8^0 x^8 + C_8^1 x^7.\frac{1}{2x} + \dots + C_8^8.\left(\frac{1}{2x}\right)^8$$

$$= x^8 + 4x^6 + 7x^4 + 7x^2 + \frac{35}{8} + \frac{7}{4x^2} + \frac{7}{16x^4} + \frac{1}{16x^6} + \frac{1}{256x^8}$$

Ví dụ 4: Thực hiện khai triển:

$$\frac{1}{27}\left(\sqrt{3} - \sqrt{15}\right)^6.$$

Giải

Ta có:

$$\left(\sqrt{3} - \sqrt{15}\right)^6 = C_6^0\left(\sqrt{3}\right)^6 - C_6^1\left(\sqrt{3}\right)^5.\sqrt{15} + \dots + C_6^6\left(\sqrt{15}\right)^6$$

$$= 3^3 C_6^0 - 3^3\sqrt{5}C_6^1 + \dots + 3^3.5^3 C_6^6$$

Do đó, ta được:

$$\frac{1}{27}\left(\sqrt{3} - \sqrt{15}\right)^6 = C_6^0 - \sqrt{5}C_6^1 + 5C_6^2 - 5\sqrt{5}C_6^3 + 25C_6^4 - 25\sqrt{5}C_6^5 + 125C_6^6$$

$$= 1 - 6\sqrt{5} + 75 - 100\sqrt{5} + 375 - 150\sqrt{5} + 125$$

$$= 576 - 256\sqrt{5} = 64(9 - 4\sqrt{5}).$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Thực hiện khai triển các nhị thức sau:

a. $(x + 2)^5$. c. $(2x + 3)^4$.

b. $(x - 3)^6$. d. $(3x - 2)^8$.

Bài tập 2: Thực hiện khai triển các nhị thức sau:

a. $(\sqrt{2} + 2\sqrt{2})^4$. b. $(\sqrt{3} - \sqrt{6})^6$.

Bài tập 3: Thực hiện khai triển các nhị thức sau:

a. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$. b. $\left(2x^2 - \frac{2}{x}\right)^6$.

Bài tập 4: Thực hiện khai triển:

a. $(x^2 - x + 1)^4$. b. $(x - 2y + 3)^5$.

Bài toán 2: Rút gọn và tính giá trị của biểu thức.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng dạng khai triển Niutơn, kết hợp với việc:

- Lựa chọn giá trị thực phù hợp.
- Các phép biến đổi đại số.
- Phép tính đạo hàm và tích phân.

Ví dụ 1: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a. $S = C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + ... + C_6^6$.

b. $T = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + 2^3C_5^3 + 2^4C_5^4 + 2^5C_5^5$.

Giải

a. Ta có:

$$(1 + x)^6 = C_6^0 + C_6^1x + C_6^2x^2 + ... + C_6^6x^6. \quad (1)$$

Thay $x = 1$ vào (1), ta được:

$$2^6 = C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 \Leftrightarrow S = 2^6 = 64.$$

b. Ta có:

$$(1 + x)^5 = C_5^0 + C_5^1x + C_5^2x^2 + ... + C_5^5x^5. \quad (2)$$

Thay $x = 2$ vào (2), ta được:

$$3^5 = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + 2^3C_5^3 + 2^4C_5^4 + 2^5C_5^5 \Leftrightarrow T = 3^5 = 243.$$

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên:

1. Trong câu a), chúng ta đã sử dụng lại một khai triển Niutơn dạng $(1 + x)^6$. Tuy nhiên, cũng có thể sử dụng ngay kết quả đã biết là:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n.$$

2. Trong câu b), vì các toán tử đều được viết dưới dạng tổng quát là $2^k C_5^k$ tương ứng với $C_5^k x^k$, do đó chúng ta đã xuất phát bằng khai triển $(1 + x)^5$ rồi thay $x = 2$. Như vậy:

   a. Nếu các toán tử trong biểu thức đều có dạng tổng quát $C_n^k a^k$ ta sử dụng khai triển dạng $(1 + x)^n$ rồi thay $x = a$.

   b. Nếu các toán tử trong biểu thức đều có dạng tổng quát $(-1)^k C_n^k a^k$ ta sử dụng khai triển dạng $(1 - x)^n$ rồi thay $x = a$.

   c. Nếu các toán tử trong biểu thức đều có dạng tổng quát $C_n^k a^{n-k}$ ta sử dụng khai triển dạng $(x + 1)^n$ rồi thay $x = a$.

   d. Nếu các toán tử trong biểu thức đều có dạng tổng quát $(-1)^k C_n^k a^{n-k}$ ta sử dụng khai triển dạng $(x - 1)^n$ rồi thay $x = a$.

3. Người ta có thể phát triển thêm cho câu b), với yêu cầu tính:

$$R = 2^8 C_5^0 + 2^9 C_5^1 + 2^{10} C_5^2 + 2^{11} C_5^3 + 2^{12} C_5^4 + 2^{13} C_5^5.$$

Khi đó, ta thấy ngay rằng:

$$R = 2^8(C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2 C_5^2 + 2^3 C_5^3 + 2^4 C_5^4 + 2^5 C_5^5) = 2^8.T = 62208.$$

Điều này gợi ý cho các em học sinh cần có mở rộng cho các dạng khai triển $k(1 + x)^n$ và $k(1 - x)^n$.

Ví dụ 2: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a. $A = 2^8.3^8 C_8^0 + 2^7.3^7 C_8^1 + \ldots + C_8^8$.

b. $B = 2^9.5^9 C_9^0 - 2^8.5^8.3 C_9^1 + \ldots + 3^9 C_9^9$.

Giải

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1 (Dựa trên nhận xét của ví dụ 1): Viết lại biểu thức dưới dạng:

$$A = 6^8 C_8^0 + 6^7 C_8^1 + \ldots + C_8^8.$$

Ta có:

$$(x + 1)^8 = x^8 C_8^0 + x^7 C_8^1 + \ldots + C_8^8. \qquad (1)$$

Thay $x = 6$ vào (1), ta được:

$$7^8 = 6^8 C_8^0 + 6^7 C_8^1 + \ldots + C_8^8 \Leftrightarrow A = 7^8 = 5764801.$$

Cách 2: Ta có:

$$(2x + 1)^8 = (2x)^8 C_8^0 + (2x)^7 C_8^1 + \ldots + C_8^8. \qquad (2)$$

Thay $x = 3$ vào (2), ta được:

$$7^8 = 2^8.3^8 C_8^0 + 2^7.3^7 C_8^1 + \ldots + C_8^8 \Leftrightarrow A = 7^8 = 5764801.$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1 (Dựa trên nhận xét của ví dụ 1): Viết lại biểu thức dưới dạng:

$$B = 10^9 C_9^0 - 10^8.3 C_9^1 + \ldots + 3^9 C_9^9.$$

Ta có:

$$(x - 3)^9 = x^9 C_9^0 - x^8.3 C_9^1 + \ldots + 3^9 C_9^9. \qquad (3)$$

Thay x = 10 vào (3), ta được:

$$7^9 = 10^9C_9^0 + 10^8.3C_9^1 + \ldots + 3^9C_9^9 \Leftrightarrow B = 7^9 = 40353607.$$

Cách 2: Ta có:

$$(2x - 3)^8 = (2x)^9C_9^0 - (2x)^8.3C_9^1 + \ldots + 3^9C_9^9 .. \qquad (4)$$

Thay x = 5 vào (4), ta được:

$$7^9 = 2^9.5^9C_9^0 - 2^8.5^8.3C_9^1 + \ldots + 3^9C_9^9 \Leftrightarrow B = 7^9 = 40353607.$$

Ví dụ 3: Rút gọn các biểu thức:

a. $A = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1}$.

b. $B = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{2n}$.

Giải

Ta có:

$$(1 + x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1x + \ldots + C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1} + C_{2n}^{2n}x^{2n}. \qquad (1)$$

$$(1 - x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1x + \ldots - C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1} + C_{2n}^{2n}x^{2n}. \qquad (2)$$

Thay x = 1 vào (1) và (2), ta được:

$$2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}. \qquad (3)$$

$$0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + \ldots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}. \qquad (4)$$

a. Từ (1) cho (2) vế theo vế, ta được:

$$2(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1}) = 2^{2n} \Leftrightarrow A = 2^{2n-1}.$$

b. Cộng (1) cho (2) vế theo vế, ta được:

$$2(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{2n}) = 2^{2n} \Leftrightarrow B = 2^{2n-1}.$$

Ví dụ 4: Rút gọn các biểu thức:

a. $A = C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n$.

b. $B = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + nC_n^{n-1} + (n+1)C_n^n$.

Giải

a. Ta có:

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n. \qquad (1)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1), ta được:

$$n(1 + x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + \ldots + (n-1)C_n^{n-1}x^{n-2} + nC_n^nx^{n-1}. \qquad (2)$$

Thay x = 1 vào (2), ta được:

$$n.2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n \Leftrightarrow A = n.2^{n-1}.$$

b. Ta có:

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n$$

$$\Leftrightarrow x(1 + x)^n = xC_n^0 + C_n^1x^2 + C_n^2x^3 + \ldots + C_n^{n-1}x^n + C_n^nx^{n+1}. \qquad (3)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (3), ta được:

$$(1 + x)^n + nx(1 + x)^{n-1} =$$

$$= C_n^0 + 2C_n^1x + 3C_n^2x^2 + \ldots + nC_n^{n-1}x^{n-1} + (n+1)C_n^nx^n. \qquad (4)$$

Thay x = 1 vào (4), ta được:

$$2^n + n.2^{n-1} = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + nC_n^{n-1} + (n+1)C_n^n \Leftrightarrow B = 2^n + n.2^{n-1}.$$

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên:

1. Trong câu a), chúng ta đã sử dụng khai triển Niutơn dạng $(1 + x)^n$, sau đó thực hiện phép lấy đạo hàm theo x để làm xuất hiện các hệ số tương ứng. Và với cách làm tương tự, ta nhận được:

$$C_n^1 - 2C_n^2 + ... + n(-1)^{n-1}C_n^n = 0.$$

2. Trong câu b), nếu các em học sinh hiểu một cách thụ động ý tưởng nhận được trong câu a) thì sẽ thấy lúng túng với thắc mắc "*Làm cách nào để nâng được giá trị của hệ số ?* ". Tuy nhiên, câu trả lời lại rất đơn giản bởi "*Để nâng được hệ số ta đi nâng bậc cho x* " và ở đây chúng ta đã thực hiện việc nhân cả hai vế của biểu thức với x trước khi lấy đạo hàm. Như vậy, các em học sinh có thể tổng quát hoá được cho:

$$B^* = kC_n^0 + (k+1)C_n^1 + (k+2)C_n^2 + ... + (k+n)C_n^n.$$

3. Như vậy, chúng ta đã biết cách giải quyết cho việc tạo ra hệ số ứng với mỗi C_n^r và một câu hỏi được đặt ra khá tự nhiên từ các em học sinh khá và giỏi là "*Chúng ta đã biết lấy đạo hàm và đã biết tới khái niệm đạo hàm cấp cao do đó hàm toán có thể xây dựng ra các ví dụ mới với yêu cầu lấy đạo hàm nhiều lần*", ví dụ sau sẽ minh hoạ điều này.

Ví dụ 5: Rút gọn các biểu thức:

a. $A = 2.1C_n^2 - 3.2C_n^3 + ... + n(n-1)(-1)^n C_n^n.$

b. $B = 3.2C_n^0 + 4.3C_n^1 + 5.4C_n^2 + ... + (n+3)(n+2)C_n^n.$

Giải

a. Ta có:

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + ... + (-1)^n C_n^n x^n. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm bậc hai theo x hai vế của (1), ta được:

$$-n(1-x)^{n-1} = -C_n^1 + 2C_n^2 x - 3C_n^3 x^2 + ... + n(-1)^n C_n^n x^{n-1}$$

$$n(1-x)^{n-2} = 2.1C_n^2 - 3.2C_n^3 x + ... + n(n-1)(-1)^n C_n^n x^{n-2}. \quad (2)$$

Thay x = 1 vào (2), ta được:

$$0 = 2.1C_n^2 - 3.2C_n^3 + ... + n(n-1)(-1)^n C_n^n \Leftrightarrow A = 0.$$

b. Ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$$

$$\Leftrightarrow x^3(1+x)^n = x^3 C_n^0 + C_n^1 x^4 + C_n^2 x^5 + ... + C_n^n x^{n+3}. \quad (3)$$

Lấy đạo hàm bậc 2 theo x hai vế của (3), ta được:

$$3x^2(1+x)^n + nx^3(1+x)^{n-1} =$$

$$= 3x^2 C_n^0 + 4C_n^1 x^3 + 5C_n^2 x^4 + ... + (n+3)C_n^n x^{n+2}$$

$$3.2x(1+x)^n + 3nx^2(1+x)^{n-1} + 3nx^2(1+x)^{n-1} + n(n-1)x^3(1+x)^{n-2} =$$

$$= 3.2xC_n^0 + 4.3C_n^1 x^2 + 5.4C_n^2 x^3 + ... + (n+3)(n+2)C_n^n x^{n+1}. \quad (4)$$

Thay x = 1 vào (4), ta được:

$$6.2^n + 6n.2^{n-1} + n(n-1).2^{n-2} = 3.2C_n^0 + 4.3C_n^1 + 5.4C_n^2 + ... + (n+3)(n+2)C_n^n$$

$$\Leftrightarrow B = 6.2^n + 6n.2^{n-1} + n(n-1).2^{n-2}.$$

Ví dụ 6: Rút gọn biểu thức:

$$A = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n.$$

Giải

Ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + .. + C_n^n x^n. \qquad (1)$$

Lấy tích phân theo x từ 0 đến 1 hai vế của (1), ta được:

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n)dx$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \left(C_n^0 x + \frac{1}{2}C_n^1 x^2 + \frac{1}{3}C_n^2 x^3 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n x^{n+1}\right)\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n \Leftrightarrow A = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tính giá trị biểu thức:

$$S_1 = C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + ... + C_6^6.$$

Bài tập 2: Tính giá trị biểu thức:

$$S_2 = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + ... + 2^5C_5^5.$$

Bài tập 3: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a. $S_1 = 2^nC_n^0 + 2^{n-2}C_n^2 + 2^{n-4}C_n^4 + ... + C_n^n.$

b. $S_2 = 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-3}C_n^3 + 2^{n-5}C_n^5 + ... + C_n^n.$

Bài tập 4: Tính các tổng sau:

a. $S = 3^{17}C_{17}^0 - 4^1.3^{16}C_{17}^1 + 4^2.3^{15}C_{17}^2 - 4^3.3^{14}C_{17}^3 ... - 4^{17}C_{17}^{17}.$

b. $S = C_{11}^6 + C_{11}^7 + C_{11}^8 + C_{11}^9 + C_{11}^{10} + C_{11}^{11}.$

c. $S = 1 - 10C_{2n}^1 + 10^2C_{2n}^3 - 10^3C_{2n}^5 + ... - 10^{2n-3}C_{2n}^{2n-1} + 10^{2n}.$

d. $S = C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10}$

e. $S = C_{2000}^0 + 2C_{2000}^1 + 3C_{2000}^2 + ... + 2001C_{2000}^{2000}.$

f. $S = C_{2002}^0 C_{2002}^{2001} + C_{2002}^1 C_{2001}^{2000} + ... + C_{2002}^k C_{2002-k}^{2001-k} + ... + C_{2002}^{2001} C_1^0$

Bài tập 5: Tính các tổng sau:

a. $S = \frac{A_n^0}{0!} + \frac{A_n^1}{1!} + ... + \frac{A_n^n}{n!}.$

b. $S = C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2C_n^2 + 3^3C_n^3 + ... + 3^nC_n^n.$

c. $S = C_{2n}^{2} + C_{2n}^{4} + C_{2n}^{6} + ... + C_{2n}^{2n}$.

d. $S = 1 - 2C_{n}^{1} - 2C_{n}^{2} + 2^2C_{n}^{3} - 2^3C_{n}^{4} + ... + (-1)^n 2^n C_{n}^{n}$.

Bài tập 6: Cho n là một số nguyên dương.

a. Tính tích phân:

$$I = \int_0^1 (1+x)^n dx.$$

b. Tính:

$$S = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n.$$

Bài tập 7: Tính tích phân:

$$I = \int_0^1 x(1-x)^{19} dx.$$

Rút gọn tổng:

$$S = \frac{1}{2}C_{19}^{0} - \frac{1}{3}C_{19}^{1} + \frac{1}{4}C_{19}^{2} - ... + \frac{1}{20}C_{19}^{18} - \frac{1}{21}C_{19}^{19}$$

Bài tập 8: Cho $f(x) = x(x+1)^{2001}$.

a. Tính $f'(x)$.

b. Tính tổng $S = C_{2001}^{0} + 2C_{2001}^{1} + ... + 2001C_{2001}^{2000} + 2002C_{2001}^{2001}$

Bài toán 3: Sử dụng khai triển Niutơn chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức tổ hợp.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng dạng khai triển Niutơn, kết hợp với việc:

- Lựa chọn giá trị thực phù hợp.
- Các phép biến đổi đại số.
- Phép tính đạo hàm và tích phân.
- Phép đánh giá cho bất đẳng thức cùng với các phương pháp chứng minh đẳng thức và bất đẳng thức đơn.

Ví dụ 1: Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng:

$$1 + 4C_n^1 + 4^2C_n^2 + ... + 4^{n-1}C_n^{n-1} + 4^nC_n^n = 5^n.$$

Giải

Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n. \quad (1)$$

Thay x = 4 vào (1), ta được:

$$5^n = 1 + 4C_n^1 + 4^2C_n^2 + ... + 4^{n-1}C_n^{n-1} + 4^nC_n^n, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 2: Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng:

a. $C_n^0 - 2C_n^1 + 2^2C_n^2 - ... + (-1)^n.2^nC_n^n = (-1)^n$.

b. $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - ... + (-1)^{k-1}kC_n^k + ... + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0$.

Giải

Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1x + C_n^2x^2 - ... + (-1)^kC_n^kx^k + ... + (-1)^nC_n^nx^n. \quad (1)$$

a. Thay x = 2 vào (1), ta được:

$$(-1)^n = C_n^0 - 2C_n^1 + 2^2C_n^2 - ... + (-1)^n.2^nC_n^n, \text{ đpcm.}$$

b. Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1), ta được.

$$-n(1-x)^{n-1} = -C_n^1 + 2C_n^2x + ... + n(-1)^nC_n^nx^{n-1}. \quad (2)$$

Thay x = 1 vào (2), ta được:

$$0 = -C_n^1 + 2C_n^2 + ... + n(-1)^nC_n^n$$

$$\Leftrightarrow C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - ... + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 3: Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng:

$$C_n^0 + C_n^2 + ... = C_n^1 + C_n^3 + ... = 2^{n-1},$$

với giả thiết $C_n^m = 0$ nếu m > n và $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ nếu $m \le n$.

Giải

Ta có:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n \Leftrightarrow 2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n + ... \quad (1)$$

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^nC_n^n$$

$$\Leftrightarrow 0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^nC_n^n + ... \quad (2)$$

Suy ra:

- (1) + (2), ta được:

$$2^n = 2(C_n^0 + C_n^2 + ...) \Leftrightarrow C_n^0 + C_n^2 + ... = 2^{n-1}. \quad (3)$$

- (1) – (2), ta được:

$$2^n = 2(C_n^1 + C_n^3 + ...) \Leftrightarrow C_n^1 + C_n^3 + ... = 2^{n-1}. \quad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 4: Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng:

a. $C_n^1 + 2C_n^2 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = n.2^{n-1}$.

b. $2.1C_n^2 + 3.2C_n^3 + ... + n(n-1)C_n^n = n(n-1).2^{n-2}$.

c. $(-1)^rC_r^rC_n^r + (-1)^{r+1}C_{r+1}^rC_n^{r+1} + ... + (-1)^nC_n^rC_n^n = 0$,

với r nguyên dương và $r \le n$.

Giải

Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1), ta được:

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + \ldots + (n-1)C_n^{n-1}x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}. \qquad (2)$$

a. Thay x = 1 vào (2), ta được:

$$n.2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n, \text{ đpcm.}$$

b. Lấy đạo hàm theo x hai vế của (2), ta được:

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2.1C_n^2 + 3.2C_n^3 x + \ldots + n(n-1)C_n^n x^{n-2}. \qquad (3)$$

Thay x = 1 vào (3), ta được:

$$n(n-1).2^{n-2} = 2.1C_n^2 + 3.2C_n^3 + \ldots + n(n-1)C_n^n, \text{ đpcm.}$$

c. Lấy đạo hàm cấp r theo x hai vế của (1), ta được:

$$n(n-1)\ldots(n-r+1)(1+x)^{n-r} = \sum_{k=r}^{n} k(k-1)\ldots(k-r+1)C_n^k x^{k-r}. \qquad (4)$$

Chia hai vế của (4) cho r!, ta được:

$$\frac{1}{r!}n(n-1)\ldots(n-r+1)(1+x)^{n-r} = \sum_{k=r}^{n}\frac{k(k-1)\ldots(k-r+1)}{r!}C_n^k x^{k-r}$$

$$= \sum_{k=r}^{n}\frac{k!}{r!.(k-r)!}C_n^k x^{k-r} = \sum_{k=r}^{n}C_k^r C_n^k x^{k-r}. \qquad (5)$$

Thay x = – 1 vào (5), ta được:

$$0 = \sum_{k=r}^{n}C_k^r C_n^k(-1)^{k-r} \Leftrightarrow \sum_{k=r}^{n}C_k^r C_n^k(-1)^k = 0, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 5: Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng:

$$C_n^2 + 2C_n^3 + \ldots + (n-1)C_n^n > (n-2)2^{n-1}.$$

Giải

Ta lần lượt thực hiện:

- Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^n x^n. \qquad (1)$$

Thay x = 1 vào (1), ta được:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + nC_n^n. \qquad (2)$$

- Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1), ta được:

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + \ldots + (n-1)C_n^{n-1}x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}. \qquad (3)$$

Thay x = 1 vào (3), ta được:

$$n.2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n. \qquad (4)$$

Lấy (4) – (3), ta được:

$$n.2^{n-1} - 2^n = -C_n^0 + C_n^2 + \ldots + (n-2)C_n^{n-1} + (n-1)C_n^n$$

$$\Leftrightarrow C_n^2 + 2C_n^3 + \ldots + (n-1)C_n^n = (n-2)2^{n-1} + 1 > (n-2)2^{n-1}, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 6: Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng:

$$C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + n2^{n-1}.C_n^n =$$

$$= n.4^{n-1}.C_n^0 - (n-1).4^{n-2}C_n^1 + (n-2).4^{n-3}C_n^2 + \dots + (-1)^{n-1}.C_n^{n-1}.$$

Giải

a. Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^n x^n. \qquad (1)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1), ta được:

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + \dots + (n-1)C_n^{n-1}x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}. \qquad (2)$$

Thay x = 2 vào (2), ta được:

$$n.3^{n-1} = C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + n2^{n-1}.C_n^n. \qquad (3)$$

b. Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n C_n^n. \qquad (4)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (4), ta được:

$$n(x-1)^{n-1} = nC_n^0 x^{n-1} - (n-1)C_n^1 x^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}. \qquad (5)$$

Thay x = 4 vào (5), ta được:

$$n.3^{n-1} = n.4^{n-1}.C_n^0 - (n-1).4^{n-2}C_n^1 + \dots + (-1)^{n-1}.C_n^{n-1}. \qquad (6)$$

Từ (3) và (6), suy ra điều cần chứng minh.

Ví dụ 7: Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng:

a. $C_n^0 + \dfrac{C_n^1}{1+1} + \dfrac{C_n^2}{1+2} + \dots + \dfrac{C_n^k}{1+k} + \dots + \dfrac{C_n^n}{1+n} = \dfrac{2^{n+1}-1}{1+n}.$

b. $C_n^0 - \dfrac{C_n^1}{1+1} + \dfrac{C_n^2}{1+2} - \dots + (-1)^n.\dfrac{C_n^n}{1+n} = \dfrac{1}{1+n}.$

Giải

Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k. \qquad (1)$$

Lấy tích phân theo x hai vế của (1), ta được:

$$\int_0^t (1+x)^n dx = \int_0^t \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \Leftrightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^t = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_0^t$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+t)^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{k+1}C_n^k}{k+1}. \qquad (2)$$

a. Thay t = 1 vào (2), ta được:

$$\frac{2^{n+1}-1}{1+n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}, \text{đpcm.}$$

b. Thay t = − 1 vào (2), ta được:

$$-\frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}C_n^k}{k+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{k+1}, \text{đpcm.}$$

Ví dụ 8: Chứng minh đẳng thức:

$$2C_n^0 + \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + ... + \frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}.$$

Giải

Ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n.$$

Lấy tích phân theo x hai vế của (1) từ 0 đến 2, ta được:

$$\int_0^2 (1+x)^n dx = \int_0^2 (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n)dx$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^2 = \left.\left(C_n^0 x + \frac{1}{2}C_n^1 x^2 + \frac{1}{3}C_n^2 x^3 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n x^{n+1}\right)\right|_0^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{n+1}-1}{n+1} = 2C_n^0 + \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + ... + \frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 9: Chứng minh đẳng thức:

$$n4^{n-1}C_n^0 - (n-1)4^{n-2}C_n^1 + ... + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} =$$
$$= C_n^1 + 2^2 C_n^2 + ... + n2^{n-1}C_n^n$$

Giải

Ta có:

$$(2x-1)^n = C_n^0(2x)^n - C_n^1(2x)^{n-1} + ... + (-1)^n C_n^n. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1), ta được:

$$2n(2x-1)^{n-1} = 2nC_n^0(2x)^{n-1} - 2(n-1)C_n^1(2x)^{n-2} +$$
$$+ ... + (-1)^{n-1}2C_n^{n-1}. \quad (2)$$

Thay x = 2 vào (2), ta được:

$$n3^{n-1} = n4^{n-1}C_n^0 - (n-1)4^{n-2}C_n^1 + ... + (-1)^{n-1}2C_n^{n-1} \quad (3)$$

Mặt khác, ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^n x^n. \quad (4)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (4), ta được:

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + ... + nC_n^n x^{n-1}. \quad (5)$$

Thay x = 2 vào (5), ta được:

$$n3^{n-1} = C_n^1 + 4C_n^2 + ... + n2^{n-1}C_n^n. \quad (6)$$

Từ (3) và (6), suy ra điều cần chứng minh.

Ví dụ 10: Tính tích phân:

$$I = \int_0^2 (1-x)^n dx .$$

Từ đó chứng minh rằng:

$$2C_n^0 - 2^2\frac{1}{2}C_n^1 + 2^3\frac{1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1}2^{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}[1+(-1)^n].$$

Giải

Ta có:

$$I = \int_0^2 (1-x)^n dx = -\int_0^2 (1-x)^n d(1-x)$$

$$= -\left.\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^2 = \frac{1}{n+1}[(-1)^n + 1]. \qquad (1)$$

Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^k . \qquad (2)$$

Lấy tích phân theo x hai vế của (2), ta được:

$$\int_0^2 (1-x)^n dx = \int_0^2 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_0^2$$

$$= 2C_n^0 - 2^2\frac{1}{2}C_n^1 + 2^3\frac{1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1}2^{n+1}C_n^n . \qquad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra điều cần chứng minh.

Ví dụ 11: Với n, k là số nguyên dương và $1 \le k \le n$, chứng minh rằng:

$$C_n^0 C_n^k - C_n^1 C_{n-1}^{k-1} + C_n^2 C_{n-2}^{k-2} - \ldots + (-1)^k C_n^k C_0^{n-k} = 0.$$

Giải

Với mọi x, và với k là số nguyên dương ta có:

$$(1+x)^k = C_k^0 + C_k^1 x + C_k^2 x^2 + \ldots + C_k^k x^k$$

$$\Leftrightarrow C_n^k(1+x)^k = C_k^0 C_n^k + C_k^1 C_n^k x + C_k^2 C_n^k x^2 + \ldots + C_k^k C_n^k x^k. \qquad (1)$$

Ta có:

$$C_k^m . C_n^k = \frac{k!}{m!(k-m)!} . \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} . \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!}$$

$$= C_n^m . C_{n-m}^{k-m} .$$

Do đó (1) có dạng:

$$C_n^k(1+x)^k = C_n^0 C_n^k + C_n^1 C_{n-1}^{k-1} x + C_n^2 C_{n-2}^{k-2} x^2 + \ldots + C_n^k C_0^{n-k} x^k. \qquad (2)$$

Thay x = – 1 vào (2), ta được:

$$0 = C_n^0 C_n^k - C_n^1 C_{n-1}^{k-1} + C_n^2 C_{n-2}^{k-2} - \ldots + (-1)^k C_n^k C_0^{n-k} ,\text{ đpcm.}$$

Ví dụ 12: Chứng minh rằng với các số m, n, p nguyên, dương sao cho $p \leq m$ và $p \leq m$ ta có:

$$C_{n+m}^{p} = C_n^0 C_m^p + C_n^1 C_m^{p-1} + ... + C_n^{p-1} C_m^1 + C_n^p C_m^0.$$

Giải

Với mọi x, và với n, m là số nguyên dương ta có:

$$(1 + x)^{n+m} = (1 + x)^n . (1 + x)^m . \qquad (1)$$

Mặt khác:

- $$(1 + x)^{n+m} = \sum_{p=0}^{n+m} C_{n+m}^{p} x^p . \qquad (2)$$
- $$(1 + x)^n . (1 + x)^m = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k . \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k$$ $$= \sum_{p=0}^{n+m} [(\sum_{k=0}^{p} C_n^k . C_m^{p-k}) x^p] . \qquad (3)$$

Do (1) nên các hệ số của x^p, $p = \overline{0, n+m}$ trong các khai triển (2) và (3) bằng nhau. Vậy:

$$C_{n+m}^{p} = \sum_{k=0}^{p} C_n^k . C_m^{p-k} \text{, đpcm.}$$

Nhận xét quan trọng **:**

1. **Với $p = n = m$, ta được:**

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n .$$

2. **Với $p = r$, $N = n + m$, ta được:**

$$C_N^r = C_{N-m}^0 C_m^r + C_{N-m}^1 C_m^{r-1} + ... + C_{N-m}^{r-1} C_m^1 + C_{N-m}^r C_m^0 .$$

3. **Bạn đọc hãy lấy ý tưởng trong ví dụ trên áp dụng với khai triển $(1 - x)^{n+m}$, từ đó chứng minh rằng:**

$$(C_{2n}^0)^2 - (C_{2n}^1)^2 + ... + (C_{2n}^{2n})^2 = (-1)^n C_{2n}^n .$$

Ví dụ 13: **Chứng minh rằng nếu $a + b = 1$ thì với mọi số tự nhiên n ta có:**

$$a^n + b^n \geq \frac{1}{2^{n-1}} .$$

Giải

Ta có:

$$a + b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} + x \\ b = \dfrac{1}{2} - x \end{cases} .$$

Suy ra:

$$a^n + b^n = \left(\frac{1}{2} + x\right)^n + \left(\frac{1}{2} - x\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k x^k}{2^{n-k}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k (-1)^k x^k}{2^{n-k}}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{C_n^2 x^2}{2^{n-1}} + \frac{C_n^4 x^4}{2^{n-3}} + \ldots \geq \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 14: Với n là số nguyên, dương và lớn hơn 1, chứng minh rằng:

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Giải

Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k. \qquad (1)$$

Thay $x = \frac{1}{n}$ vào (1), ta được:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n^k}.$$

Ta lần lượt có các đánh giá sau:

- Ta có:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \sum_{k=0}^{1} \frac{C_n^k}{n^k} = C_n^0 + \frac{C_n^1}{n} = 1 + 1 = 2. \qquad (2)$$

- Ta có nhận xét sau với $k \geq 2$:

$$\frac{C_n^k}{n^k} = \frac{n!}{n^k.k!.(n-k)!} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Áp dụng với $k = \overline{2, n}$, ta nhận được:

$$\frac{C_n^2}{n^2} \leq 1 - \frac{1}{2},$$

$$\frac{C_n^3}{n^3} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

...

$$\frac{C_n^n}{n^n} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

suy ra:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + \frac{C_n^1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{C_n^k}{n^k} < 2 + 1 - \frac{1}{n} < 3. \qquad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra điều cần chứng minh.

Chú ý: Các em cũng biết rằng $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Với e = 2,7182818284 59045 23536 02874...

Hiện nay, người ta đã tìm cho e gần 3000 chữ số thập phân nhưng vẫn chưa có dấu hiệu tuần hoàn. Vì vậy người ta cho rằng e là số thập phân vô hạn không tuần hoàn nghĩa là một số vô tỉ!

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Khai triển $(3x - 1)^{16}$. Chứng minh rằng:

$$3^{16}C_{16}^{0} - 3^{15}C_{16}^{1} + \ldots + C_{16}^{16} = 2^{16}.$$

Bài tập 2: Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng:

$$3^{n}\left[C_{n}^{0} - \frac{1}{3}C_{n}^{1} + \frac{1}{3^{2}}C_{n}^{2} + \ldots + (-1)^{n}\frac{1}{3^{n}}C_{n}^{n}\right] = 2^{n}.$$

Bài tập 3: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $C_{n}^{0} + 6C_{n}^{1} + 6^{2}C_{n}^{2} + \ldots + 6^{n}C_{n}^{n} = 7^{n}$.

b. $3^{17}C_{17}^{0} + 4^{1}3^{16}C_{17}^{1} + \ldots + 4^{17}C_{17}^{17} = 7^{17}$.

Bài tập 4: Tính tích phân:

$$I_{n} = \int_{0}^{1}(1 - x^{2})^{n}dx \text{, với } n \in \mathbf{N}.$$

Từ đó suy ra:

$$C_{n}^{0} - \frac{C_{n}^{1}}{3} + \frac{C_{n}^{2}}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n}C_{n}^{n}}{2n+1} = \frac{2.4\ldots2n}{3.5\ldots(2n+1)}.$$

Bài tập 5: Cho n là một số tự nhiên lớn hơn 2.

a. Tính tích phân:

$$I = \int_{0}^{1}x^{2}(1 + x^{3})^{n}dx.$$

b. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3}C_{n}^{0} + \frac{1}{6}C_{n}^{1} + \frac{1}{9}C_{n}^{2} + \ldots + \frac{1}{3(n+1)}C_{n}^{n} = \frac{2^{n+1} - 1}{3(n+1)}.$$

Bài tập 6: Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2}.C_{n}^{0} - \frac{1}{4}.C_{n}^{1} + \ldots + \frac{(-1)^{n}}{2n+2}C_{n}^{n} = \frac{1}{2(n+1)}.$$

Bài tập 7: Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{3}.C_{n}^{0} + \frac{1}{6}.C_{n}^{1} + \ldots + \frac{1}{3n+3}C_{n}^{n} = \frac{2^{n+1} - 1}{3(n+1)}.$$

Bài tập 8: Chứng minh rằng với các số k, n ∈ **N** và 5 ≤ k ≤ n ta có:

$$C_{n+5}^{k} = C_{5}^{0}C_{n}^{k} + C_{5}^{1}C_{n}^{k-1} + \ldots + C_{5}^{5}C_{n}^{k-5}.$$

Bài tập 9: Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{n}(C_{n}^{1} + 2C_{n}^{2} + 3C_{n}^{3} + \ldots + nC_{n}^{n}) < n!.$$

Bài tập 10: Chứng minh rằng:

$n^{n+1} > (n + 1)^{n}$ với mọi $n \in \mathbf{Z}^{+}$ và $n \geq 3$.

Bài tập 11: Chứng minh rằng với $\forall x \neq 0$ và n lẻ thoả mãn $3 \leq n \in \mathbf{Z}$ luôn có:

$$(1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!})(1 - x + \frac{x^2}{2!} - ... - \frac{x^n}{n!}) < 1.$$

Bài toán 4: Giá trị của hệ số trong khai triển Niutơn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với các yêu cầu về hệ số trong khai triển Niutơn, ta cần lưu ý:

1. Ta có:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i}.b^i$$

do đó hệ số của số hạng thứ i là C_n^i, và số hạng thứ i là $C_n^i a^{n-i}.b^i$.

2. Ta có:

$$(x^\alpha + x^\beta)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (x^\alpha)^{n-i}.(x^\beta)^i = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^{\alpha(n-i)+\beta i}$$

do đó:

- Hệ số của x^k trong khai triển trên là C_n^i với i là nghiệm của phương trình:

  $\alpha(n - i) + \beta i = k.$
- Đặc biệt, khi $k = 0$ đó chính là số hạng không phụ thuộc x.

Ví dụ 1: Tìm 2 hạng tử chính giữa của khai triển $(x^3 - xy)^{15}$.

Giải

Trong khai triển trên có $n = 15$, do đó có 16 hạng tử nên hai hạng tử chính giữa là:

$$C_{15}^7 (x^3)^8.(-xy)^7 = -6435x^{31}.y^7.$$

$$C_{15}^8 (x^3)^7.(-xy)^8 = 6435x^{29}.y^8.$$

Ví dụ 2: Hãy tìm số hạng thứ 6 của khai triển

a. $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{15}$.   b. $(1 - 2z)^{21}$.

Giải

a. Số hạng thứ 6 của khai triển nhị thức là:

$$T_6 = C_{15}^5 \left(\sqrt{x}\right)^{10}.\left(\frac{1}{x}\right)^5 = C_{15}^5 x^5.\frac{1}{x^5} = C_{15}^5.$$

độc lập đối với x.

b. Số hạng thứ 6 của khai triển nhị thức là:

$$T_6 = C_{21}^5 (1)^{16}.(-2z)^5 = -2^5 C_{21}^5 z^5.$$

Ví dụ 3: Trong khai triển nhị thức $(2x^3 + \frac{2}{x^2})^{10}$ với $x \neq 0$, hãy tìm số hạng không phụ thuộc x.

Giải

Ta có:

$$(2x^3 + \frac{2}{x^2})^{10} = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i (2x^3)^{10-i}.(\frac{2}{x^2})^i = \sum_{i=0}^{10} 2^{10} C_{10}^i x^{30-5i}.$$

Từ đó, số hạng i + 1 không phụ thuộc x thoả mãn:

$$30 - 5i = 0 \Leftrightarrow i = 6$$

suy ra, số hạng không phụ thuộc x có giá trị bằng $2^{10}C_{10}^{6}$.

Ví dụ 4: Cho biết hệ số của số hạng thứ 3 của khai triển nhị thức $\left(x^2\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^n$ bằng 36. Tìm số hạng thứ 7.

Giải

Ta có:

$$\left(x^2\sqrt{x} + \frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^n = \left(x^{\frac{5}{2}} + x^{-\frac{2}{3}}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{n-i}\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^i$$

từ đó, hệ số của số hạng thứ 3 của khai triển nhị thức là

$$C_n^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!.(n-2)!} = 36 \Leftrightarrow n(n-1) = 72 \Leftrightarrow n^2 - n - 72 = 0 \overset{n\in N}{\Leftrightarrow} n = 9.$$

Vậy, số hạng thứ 7 được cho bởi:

$$C_9^6\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^3\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^6 = 84\,x^{\frac{7}{2}}.$$

Ví dụ 5: Tìm số nguyên dương bé nhất n sao cho trong khai triển $(1 + x)^n$ có hai hệ số liên tiếp có tỉ số là $\dfrac{7}{15}$.

Giải

Ta có:

$$(1 + x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i$$

do đó, hai hệ số liên tiếp là C_n^i và C_n^{i+1}.

Theo giả thiết, ta có:

$$\frac{C_n^i}{C_n^{i+1}} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow \frac{\dfrac{n!}{i!.(n-i)!}}{\dfrac{n!}{(i+1)!.(n-i-1)!}} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow \frac{i+1}{n-i} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow n = 3i + 2 + \frac{i+1}{7}.$$

Vậy, số nguyên dương bé nhất n tương ứng với i nhỏ nhất sao cho i + 1 chia hết cho 7 $\Rightarrow i = 6 \Rightarrow n = 21$.

Vậy, với n = 21 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 6: Trong khai triển sau đây có bao nhiêu số hạng hữu tỉ

$$\left(\sqrt{3} - \sqrt[4]{5}\right)^{124}.$$

Giải

Ta có:

$$\left(\sqrt{3} - \sqrt[4]{5}\right)^{124} = \sum_{i=0}^{124} C_{124}^i\left(\sqrt{3}\right)^{124-i}\left(-\sqrt[4]{5}\right)^i = \sum_{i=0}^{124}(-1)^i C_{124}^i 3^{\frac{124-i}{2}} 5^{\frac{i}{4}}.$$

Số hạng thứ i + 1 là hữu tỉ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \dfrac{124-i}{2} \in N \\ \dfrac{i}{4} \in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i \in N \\ 0 \le i \le 124 \\ 124 - i \,\vdots\, 2 \\ i \,\vdots\, 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i \in N \\ 0 \le i \le 124 \\ i = 4k \in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le k \le 31 \\ i = 4k \in N \end{cases}.$$

Vậy, trong khai triển đã cho có 32 số hạng hữu tỉ.

Ví dụ 7: Tìm số hạng thứ 5 của khai triển:

$$\left(\sqrt[4]{z} + z\right)^{10}$$

Số hạng nào chứa z với số mũ tự nhiên ?

Giải

Số hạng thứ 5 của khai triển nhị thức là:

$$T_5 = C_{10}^4\left(\sqrt[4]{z}\right)^6 z^4 = C_{10}^4 z^{\frac{3}{2}+4} = C_{10}^4 z^{\frac{11}{2}}$$

Giả sử số hạng thứ (k+1) của khai triển là:

$$T_{k+1} = C_{10}^k\left(\sqrt[4]{z}\right)^{10-k}.z^k = C_{10}^k z^{\frac{10+3k}{4}}$$

số hạng này chứa z với số mũ tự nhiên khi và chỉ khi:

$10 + 3k \,\vdots\, 4, \quad 0 \le k \le 10$

$\Leftrightarrow 3k + 2 \,\vdots\, 4, \quad 0 \le k \le 10 \Rightarrow k = 2; 6; 10$

Vậy, các số hạng phải tìm là các số hạng thứ 3, thứ 7 và thứ 11 với:

$$T_3 = C_{10}^2 z^4 \qquad T_7 = C_{10}^6 z^7 \qquad T_{11} = C_{10}^{10} z^{10}.$$

Ví dụ 8: Đặt:

$$(x-2)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{100}x^{100}. \qquad (1)$$

a. Tính hệ số a_{97}.

b. Tính tổng $S_1 = a_0 + a_1 + \ldots + a_{100}$.

c. Tính tổng $S_2 = a_1 + 2a_2 + \ldots + 100a_{100}$.

Giải

Ta có:

$$f(x) = (x-2)^{100} = \sum_{i=0}^{100} C_{100}^i x^{100-i}.(-2)^i.$$

a. Từ đó hệ số a_{97} được cho bởi:

$$a_{97} = C_{100}^3(-2)^3 = -1293600.$$

b. Ta có:

$$S_1 = a_0 + a_1 + \ldots + a_{100} = f(1) = (1-2)^{100} = 1.$$

c. Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1), ta được:

$$100(x-2)^{99} = a_1 + 2a_2x + \ldots + 100a_{100}x^{99}.$$

suy ra

$$S_2 = a_1 + 2a_2 + \ldots + 100a_{100} = f'(1) = 100(1-2)^{99} = -100.$$

Ví dụ 9: Trong khai triển nhị thức $(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}})^n$ hãy tìm số hạng không phụ thuộc x, biết:

$$C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79.$$

Giải

Giải phương trình:

$$C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 79$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0 \overset{n\in N}{\Leftrightarrow} n = 12.$$

Khi đó:

$$(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}})^{12} = \sum_{i=0}^{12} C_{12}^i (x^{\frac{4}{3}})^{12-i} (x^{-\frac{28}{15}})^i = \sum_{i=0}^{12} C_{12}^i x^{\frac{4(12-i)}{3} - \frac{28i}{15}}$$

từ đó, số hạng thứ i + 1 không phụ thuộc x trong khai triển trên thoả mãn:

$$\frac{4(12-i)}{3} - \frac{28i}{15} = 0 \Leftrightarrow i = 5.$$

Vậy, số hạng không phụ thuộc x bằng C_{12}^5.

Ví dụ 10: Cho đa thức:

$$P(x) = (1 + x)^9 + (1 + x)^{10} + ... + (1 + x)^{14}.$$

Có khai triển $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{14}x^{14}$. Tính hệ số a_9.

Giải

Ta có:

$$P(x) = (1 + x)^9 + (1 + x)^{10} + ... + (1 + x)^{14}$$

$$= \sum_{i=0}^{9} C_9^i x^i + \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i x^i + ... + \sum_{i=0}^{14} C_{14}^i x^i$$

do đó hệ số a_9 được cho bởi:

$$a_9 = C_9^9 + C_{10}^9 + .. + C_{14}^9 = 3003.$$

Ví dụ 11: Viết lại $P(x) = (1 + x) + 2(1 + x)^2 + ... + 20(1 + x)^{20}$ dưới dạng:

$$P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_{20}x^{20}.$$

Tìm a_{15}.

Giải

Ta có:

$$P(x) = (1 + x) + 2(1 + x)^2 + ... + 20(1 + x)^{20}$$

$$= (x + 1) + ... + 14(x + 1)^{14} + 15\sum_{i=0}^{15} C_{15}^i x^i + ... + 20\sum_{i=0}^{20} C_{20}^i x^i.$$

do đó hệ số a_{15} được cho bởi:

$$a_9 = 15C_{15}^{15} + ... + 20C_{20}^{15} = 400995.$$

Ví dụ 12: Biết tổng tất cả các hệ số của khai triển nhị thức $(x^2+1)^n$ bằng 1024, hãy tìm hệ số $a \in \mathbb{N}$ của số hạng $a.x^{12}$ trong khai triển.

Giải

Ta có:

$$f(x) = (x^2+1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (x^2)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^{2(n-i)}$$

suy ra, tổng tất cả các hệ số của khai triển bằng

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i = f(1) = 2^n \Rightarrow 2^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10.$$

Vậy, hệ số của x^{12} trong khai triển bằng $C_{10}^4 = 210$.

Ví dụ 13: Cho biết ba hạng tử đầu tiên của khai triển $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ có các hệ số là 3 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Tìm tất cả các hạng tử hữu tỉ của khai triển đã cho.

Giải

Ta có:

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n = (x^{\frac{1}{2}} + 2^{-1}.x^{-\frac{1}{4}})^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (x^{\frac{1}{2}})^{n-i} (2^{-1}x^{-\frac{1}{4}})^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i 2^{-i} x^{\frac{2n-3i}{4}}.$$

Do đó, ba hạng tử đầu tiên của khai triển có các hệ số là

$$C_n^0,\ C_n^1 2^{-1},\ C_n^2 2^{-2}.$$

Ba số hạng trên theo thứ tự lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi:

$$C_n^0 + C_n^2 2^{-2} = 2C_n^1 2^{-1} \Leftrightarrow 1 + \frac{n(n-1)}{8} = n \Leftrightarrow n^2 - 9n + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 1 \\ n = 8 \end{array}\right..$$

a. Với n = 1, ta được:

$\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}$, nó không có hạng tử hữu tỉ.

b. Với n = 8, ta được:

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^8 = \sum_{i=0}^{8} C_8^i 2^{-i} x^{\frac{16-3i}{4}}$$

Số hạng thứ i + 1 là hữu tỉ khi và chỉ khi

$$\frac{16-3i}{4} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 16 \geq 3i \,\vdots\, 4 \overset{0 \leq i \leq 8}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} i = 0 \\ i = 4 \end{array}\right.$$

- Với i = 0, ta được hạng tử thứ nhất là $C_8^0 2^0 x^4 = x^4$.
- Với i = 4, ta được hạng tử thứ năm là $C_8^4 2^{-4} x = \dfrac{35}{8} x$.

Ví dụ 14: Khai triển:

$$(1 + x + x^2)^{1996} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{3992}x^{3992}.$$

a. Tính tổng $S_1 = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{3992}$.

b. Tính tổng $S_2 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + a_{3992}$.

c. Chứng minh rằng $a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + ... + 2^{3992}a_{3992}$ chia hết cho 2401.

Giải

Đặt:

$$f(x) = (1 + x + x^2)^{1996}.$$

a. Ta có:

$$S_1 = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{3992} = f(1) = (1 + 1 + 1^2)^{1996} = 3^{1996}.$$

b. Ta có:

$$S_2 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + a_{3992} = f(-1) = (1 - 1 + 1)^{1996} = 1.$$

c. Ta có:

$$S_3 = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + ... + 2^{3992}a_{3992} = f(2) = (1 + 2 + 4)^{1996}$$
$$= 7^{1996} = 7^{1992}.7^4 = 2401.7^{1992}.$$

Vậy, S_3 chia hết cho 2401.

Ví dụ 15: Đặt:

$$(1 + x + x^2 + x^3)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{15}x^{15}.$$

a. Tính hệ số a_{10}.

b. Tính tổng $S_1 = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{15}$.

c. Tính tổng $S_2 = a_0 - a_1 + a_2 - ... - a_{15}$.

Giải

Ta có:

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)^5 = [(1 + x)(1 + x^2)]^5 = (1 + x)^5(1 + x^2)^5$$
$$= \sum_{i=0}^{5} C_5^i x^i . \sum_{i=0}^{5} C_5^i (x^2)^i .$$

a. Từ đó hệ số a_{10} được cho bởi:

$$a_{10} = C_5^0 . C_5^5 + C_5^2 . C_5^4 + C_5^4 . C_5^3 = 101.$$

b. Ta có:

$$S_1 = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{15} = f(1) = 4^5 = 1024.$$

c. Ta có:

$$S_2 = a_0 - a_1 + a_2 - ... - a_{15} = f(-1) = 0.$$

Ví dụ 16: Xác định hệ số của x^n trong khai triển:

$$(1 + x + 2x^2 + ... + nx^n)^2.$$

Giải

Ta có:

$$(1 + x + 2x^2 + ... + nx^n)^2 = (1 + x + 2x^2 + ... + nx^n).(1 + x + 2x^2 + ... + nx^n)$$

từ đó thấy ngay hệ số của x^n trong khai triển bằng:

$$A_n = 1.n + 1(n - 1) + 2(n - 2) + ... + n.1$$
$$= 2n + n(1 + 2 + ... + n) - (1^2 + 2^2 + ... + n^2)$$
$$= 2n + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3 + 11n}{6}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm hệ số của x^9 trong khai triển của $(2 - x)^{19}$.

Bài tập 2: Tìm hệ số của x^8y^9 trong khai triển của $(3x + 2y)^{17}$.

Bài tập 3: Tìm hệ số của x^5y^8 trong khai triển của $(x + y)^{13}$.

Bài tập 4: Tính hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $(x^3 + xy)^{15}$.

Bài tập 5: Hãy tìm số hạng không phụ thuộc x trong khai triển:

a $(x + \frac{1}{x})^{10}$.

b. $(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3})^{17}$.

Bài tập 6: Tìm số hạng hữu tỉ của khai triển:

a. $\left(\sqrt{3} - \sqrt{15}\right)^6$.

b. $\left(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5}\right)^{124}$.

Bài tập 7: Trong khai triển:

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^{12}.$$

tìm hệ số của số hạng chứa x^4.

Bài tập 8: Tìm giá trị của x sao cho hạng tử thứ ba của khai triển:

$$(x + x^{\lg x})^5$$

là 1000000.

Bài tập 9: Khai triển:

$$(x + 2x + 3x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{20}x^{20}.$$

a. Tính hệ số a_4.

b. Tính tổng $T = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{20}$.

Bài tập 10: Khai triển:

$$(x + 2x + 3x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2+n}.$$

Tính tổng $T = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{2n}$.

Bài tập 11: Khai triển:

$$S = (1 + x)^{12} + (1 + x)^{13} + (1 + x)^{14} + (1 + x)^{15} + (1 + x)^{16} + (1 + x)^{17},$$

Hãy tìm hệ số của số hạng chứa x^8.

Bài tập 12: Cho hàm số:

$$p(x) = (1 + 2x + 3x^2)^{10}.$$

a. Tính tích phân

$$I = \int_0^1 (1 + 3x)p(x)dx.$$

b. Xác định hệ số của x^3 trong khai triển p(x) theo quy tắc luỹ thừa của x.

Bài toán 5: Hệ số lớn nhất trong khai triển Niutơn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có hai dạng thường gặp:

Dạng 1: Tìm giá trị lớn nhất trong các giá trị $C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n$, ta thực hiện:

Bước 1: Ta biết rằng với k, n nguyên, không âm và $k \le n$, ta có:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ và } C_n^{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

Bước 2: Thực hiện so sánh C_n^k và C_n^{k-1}, bằng cách xét:

$$\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} = \frac{n-k+1}{k} = \frac{n+1}{k} - 1. \quad (1)$$

Bước 3: Từ (1), suy ra:

- $C_n^{k-1} < C_n^k \Leftrightarrow \frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} > 1 \Leftrightarrow \frac{n+1}{k} - 1 > 1 \Leftrightarrow k < \frac{n+1}{2}$.
- $C_n^{k-1} > C_n^k \Leftrightarrow \frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} < 1 \Leftrightarrow \frac{n+1}{k} - 1 < 1 \Leftrightarrow k > \frac{n+1}{2}$.

Tức là:

- C_n^k tăng khi k tăng và $k < \frac{n+1}{2}$.
- C_n^k giảm khi k tăng và $k > \frac{n+1}{2}$.

Vậy:

- Với n lẻ, thì C_n^k đạt giá trị lớn nhất tại $k = \frac{n+1}{2}$.
- Với n chẵn, thì C_n^k đạt giá trị lớn nhất tại $k = \frac{n}{2}$.

Áp dụng: 25 học sinh của một lớp muốn lập những nhóm gồm p học sinh. Tìm giá trị của p để được số nhóm là lớn nhất. Tìm số nhóm đó.

Có 25 học sinh, chọn p em. Số nhóm có thể thành lập là C_{25}^p.

Theo trên, ta có m = 25, lẻ với k = 12. C_{25}^p lớn nhất $\Leftrightarrow p = k + 1 = 13$

Vậy, với p = 13 số nhóm tối đa có thể lập là:

$$C_{25}^{13} = \frac{25!}{13!\,12!} = 5200300.$$

Dạng 2: Tìm số hạng có giá trị lớn nhất của khai triển $(p+q)^n$ biết rằng $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$, ta thực hiện:

Bước 1: Gọi t_k là số hạng thứ k + 1 trong khai triển $(p+q)^n$, ta có:

$$C_n^k p^{n-k} q^k.$$

Bước 2: Để tìm số hạng có giá trị lớn nhất khi k chạy từ 0 đến n, thực hiện so sánh t_k và t_{k-1}, bằng cách xét:

$$\frac{t_k}{t_{k-1}} = \frac{C_n^k p^{n-k} q^k}{C_n^{k-1} p^{n-k+1} q^{k-1}} = \frac{(n-k+1)q}{kp}$$

$$= 1 + \frac{(n+1)q - k}{kp}. \qquad (1)$$

Bước 3: Từ (1), suy ra:

- $t_{k-1} < t_k \Leftrightarrow \dfrac{t_k}{t_{k-1}} > 1 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{(n+1)q-k}{kp} > 1 \Leftrightarrow k < (n+1)q.$
- $t_{k-1} > t_k \Leftrightarrow \dfrac{t_k}{t_{k-1}} < 1 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{(n+1)q-k}{kp} < 1 \Leftrightarrow k > (n+1)q.$

Tức là, khi k chạy từ 0 đến n thì:

- t_k tăng khi k tăng và $k < (n + 1)q$.
- t_k giảm khi k tăng và $k > (n + 1)q$.

Vậy:

- t_k đạt giá trị lớn nhất bằng một số nguyên **m** thoả mãn
  $$(n + 1)q - 1 < m \le (n + 1)q.$$
- Nếu $(n + 1)q$ là một số nguyên m, thì $t_m = t_{m-1}$, tức là có hai số hạng có giá trị lớn nhất là t_m và t_{m-1}.

Ví dụ 1: Tìm hệ số có giá trị lớn nhất của khai triển $(a + b)^n$ biết rằng tổng các hệ số bằng 4096.

Giải

Tổng các hệ số trong khai triển $(a + b)^n$ bằng:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n \Rightarrow 2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12.$$

Do đó, hệ số có giá trị lớn nhất trong khai triển là $C_{12}^6 = 924$.

Chú ý: Vì kết quả trong bài toán 1 không được trình bày trong sách giáo khoa nên các em học sinh cần trình bày như sau trong bài thi:

Ta đi tìm giá trị lớn nhất trong các giá trị $C_{12}^0, C_{12}^1, ..., C_{12}^{12}$.

Thực hiện so sánh C_{12}^k và C_{12}^{k-1}, bằng cách xét:

$$\frac{C_{12}^k}{C_{12}^{k-1}} = \frac{\dfrac{12!}{k!(12-k)!}}{\dfrac{12!}{(k-1)!(13-k)!}} = \frac{13-k}{k} = \frac{13}{k} - 1. \qquad (1)$$

Từ (1), suy ra:

- $C_{12}^{k-1} < C_{12}^k \Leftrightarrow \dfrac{C_{12}^k}{C_{12}^{k-1}} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{13}{k} - 1 > 1 \Leftrightarrow k < \dfrac{13}{2}.$
- $C_{12}^{k-1} > C_{12}^k \Leftrightarrow \dfrac{C_{12}^k}{C_{12}^{k-1}} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{13}{k} - 1 < 1 \Leftrightarrow k > \dfrac{13}{2}.$

Vậy, C_{12}^k đạt giá trị lớn nhất tại k = 6 và $C_{12}^6 = 924$.

Ví dụ 2: Xác định số n sao cho trong khai triển nhị thức $(x + 2)^n$ hạng tử thứ 11 là số hạng tử có hệ số lớn nhất.

Giải

Ta có:

$$(x+2)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^{n-i}.2^i = \sum_{i=0}^{n} C_n^i 2^i.x^{n-i}.$$

từ đó, hạng tử thứ 10, 11, 12 có hệ số bằng $C_n^9 2^9$, $C_n^{10} 2^{10}$, $C_n^{11} 2^{11}$

Để hạng tử thứ 11 là số hạng tử có hệ số lớn nhất điều kiện là:

$$\begin{cases} C_n^{10}2^{10} > C_n^9 2^9 \\ C_n^{10}2^{10} > C_n^{11}2^{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2.n!}{10!.(n-10)!} > \dfrac{n!}{9!.(n-9)!} \\ \dfrac{n!}{10!.(n-10)!} > \dfrac{2.n!}{11!.(n-11)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{10} > \dfrac{1}{n-9} \\ \dfrac{1}{n-10} > \dfrac{2}{11} \end{cases} \Leftrightarrow 14 < n < \frac{31}{2} \overset{n\in N}{\Leftrightarrow} n = 15.$$

Vậy, với n = 15 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 3: Tìm số hạng có giá trị lớn nhất của khai triển $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^8$.

Giải

Gọi t_k là số hạng thứ k + 1 trong khai triển $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^8$, ta có:

$$C_8^k\left(\frac{1}{3}\right)^{8-k}.\left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Để tìm số hạng có giá trị lớn nhất khi k chạy từ 0 đến 8, thực hiện so sánh t_k và t_{k-1}, bằng cách xét:

$$\frac{t_k}{t_{k-1}} = \frac{C_8^k\left(\frac{1}{3}\right)^{8-k}\left(\frac{2}{3}\right)^k}{C_8^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{9-k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}} = \frac{2(9-k)}{k}. \qquad (1)$$

Từ (1), suy ra:

- $t_{k-1} < t_k \Leftrightarrow \dfrac{t_k}{t_{k-1}} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{2(9-k)}{k} > 1 \Leftrightarrow k < 6.$
- $t_{k-1} > t_k \Leftrightarrow \dfrac{t_k}{t_{k-1}} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{2(9-k)}{k} < 1 \Leftrightarrow k > 6.$

Tức là, khi k chạy từ 0 đến 8 thì:

- t_k tăng khi k tăng và k < 6.
- t_k giảm khi k tăng và k > 6.

Vậy, ta được t_k đạt giá trị lớn nhất tại k = 6 và có giá trị bằng:

$$C_8^6\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{1792}{2187}.$$

Ví dụ 4: Cho 2 số tự nhiên p và q khác 0 sao cho tổng p + q = a, với a là 1 số tự nhiên đã biết. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P_p.P_q$

Giải

Ta có:

$$m = P_p.\,P_q = p!q!$$

Vì biểu thức m có tính đối xứng với p và q nên ta có thể giả sử $p \le q$

$$\Rightarrow 2p \le p + q = a$$

- Nếu a chẵn, ta có: $p \le \frac{a}{2}$.
- Nếu a lẻ, ta có: $p \le \frac{a-1}{2}$.

Do đó:

$$C^p_{p+q} = C^p_n = \frac{(p+q)!}{p!\,q!} = \frac{a!}{p!\,q!} \Rightarrow p!q! = \frac{a!}{C^p_a} \Rightarrow m = \frac{a!}{C^p_a}.$$

Suy ra:

- m nhỏ nhất khi và chỉ khi C^p_a lớn nhất, khi đó:

$$q = p = \frac{a}{2}\text{, nếu a chẵn} \Rightarrow m_{\min} = \left[\left(\frac{a}{2}\right)!\right]^2$$

$$p = \frac{a-1}{2}\text{, nếu a lẻ} \Rightarrow m_{\min} = \left(\frac{a-1}{2}\right)!\left(\frac{a+1}{2}\right)!$$

- m lớn nhất khi C^p_a nhỏ nhất $\Leftrightarrow p = 1 \Leftrightarrow C^p_a = C^1_a = a$

Vậy, ta được $m_{\max} = \frac{a!}{a} = (a-1)!$

Ví dụ 5: Khai triển đa thức $P(x) = (1 + 2x)^{12}$ thành dạng:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{20}x^{20}.$$

Tìm $\max(a_1, a_2,\ldots, a_{12})$.

Giải

Ta có:

$$(1+2x)^{12} = \sum_{i=0}^{12} C^i_{12}(2x)^i = \sum_{i=0}^{12} C^i_{12}2^i x^i$$

suy ra $a_i = C^i_{12}2^i$, với $i = \overline{1,12}$.

Để tìm $\max(a_1, a_2,\ldots, a_{12})$ với $i = \overline{1,12}$, thực hiện so sánh a_i và a_{i+1}, bằng cách xét:

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{C^i_{12}2^i}{C^{i+1}_{12}2^{i+1}} = \frac{\dfrac{12!}{i!.(12-i)!}}{\dfrac{2.12!}{(i+1)!.(11-i)!}} = \frac{i+1}{2(12-i)}. \qquad (1)$$

Từ (1), suy ra:

- $a_{i+1} < a_i \Leftrightarrow \dfrac{a_i}{a_{i+1}} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{i+1}{2(12-i)} > 1 \Leftrightarrow i > \dfrac{23}{3}$.
- $a_{i+1} > a_i \Leftrightarrow \dfrac{a_i}{a_{i+1}} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{i+1}{2(12-i)} < 1 \Leftrightarrow i < \dfrac{23}{3}$.

Tức là, khi i chạy từ 1 đến 12 thì:

- a_i giảm khi i tăng và $i > \dfrac{23}{3}$.
- a_i tăng khi i tăng và $i < \dfrac{23}{3}$.

Vậy, a_i đạt giá trị lớn nhất tại $i = 8$ và có giá trị bằng:

$$C_{12}^{8}2^{8} = 126720.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm các giá trị của $x \neq 0$ cho biết hạng tử thứ 6 có giá trị lớn hơn giá trị của hai hạng tử kế bên, trong khai triển nhị thức $(2x + 3)^9$.

Bài tập 2: Tìm hệ số lớn nhất của khai triển $(a + b)^n$ cho biết tổng tất cả các hệ số là 4096.

Bài tập 3: Trong khai triển:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10} = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_{10}x^{10}, \text{ với } a_k \in \mathbf{R}$$

hãy tìm hệ số a_k lớn nhất $(0 \leq k \leq 10)$.

Bài tập 4: Tìm hạng tử của khai triển $(a + b)^{50}$ có giá trị tuyệt đối lớn nhất, cho biết $|a| = |b|\sqrt{3}$.

Bài tập 5: Xét khai triển $(p + q)^n$ với $p < 0$, $q > 0$, $p + q = 1$.

a. Tìm điều kiện để hạng tử đầu là hạng tử lớn nhất.

b. Tìm điều kiện để hạng tử cuối là hạng tử lớn nhất.

Bài tập 6: Khai triển đa thức $P(x) = (1 + 3x)^8$ thành dạng:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{20}x^{20}.$$

Tìm $\max(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$.

CÁC DẠNG TOÁN KHÁC

Bài 1: Chứng minh rằng từ một số vô hạn các tấm thẻ thuộc 2 loại khác nhau, ta có thể chọn ra một bộ gồm n tấm thẻ, có thứ tự và chứa ít nhất mỗi loại tấm thẻ, bằng $2(2^{n-1}-1)$ cách khác nhau.

Giải

Số các bộ, sắp thứ tự, khác nhau, gồm n tấm thẻ cũng chính là số tập con của tập E gồm n thẻ kể cả tập rỗng và chính E, bằng 2^n.

Trong số này có 2 bộ chỉ gồm các tấm thẻ cùng loại.

Do đó số bộ n thẻ phải tìm là:

$$2^n - 2 = 2(2^{n-1}-1).$$

Bài 2: Có bao nhiêu cách chia một tập hợp có n phần tử thành 2 tập hợp con.

Giải

Ta xét trường hợp các tập con đều không phải là tập rỗng (tập hợp trống). Gọi K là số cách chia tập hợp E gồm n phần tử thành 2 tập con không rỗng của E. Ứng với mỗi cách chia, ta có 2 tập con không rỗng. Do đó 2K là số tập con không rỗng của E và khác E. Số 2K chính là tổng của số các tập con có 1, 2, 3, ... (n-1) phần tử của E. Mỗi tập con có p phần tử tương ứng với số tổ hợp n chập p bằng C_n^p. Do đó ta có:

$$2K = C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1}$$

Theo bài trên, ta có:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

mà $C_n^0 = C_n^n = 1 \Rightarrow 2K = 2^n - 2 \Rightarrow K = 2^{n-1} - 1$

Vậy số cách chia một tập hợp gồm n phần tử thành 2 tập hợp con không rỗng là:

$$K = 2^{n-1} - 1.$$

Nếu kể cả cách chia tập E thành 2 tập con là tập rỗng và chính E thì số cách chia sẽ là:

$$K' = K + 1 = 2^{n-1}.$$

ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG I

ĐỀ SỐ 1

(Thời gian 60 phút)

Câu I. (2 điểm): Chứng minh rằng:

$$1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots + n.n! < (n + 1)!.$$

Câu II. (2 điểm): Cho tập hợp E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau đôi một lấy từ E trong mỗi trường hợp sau:

a. (1 điểm): Là số chẵn.

A. 3000 số. **B.** 3200 số. **C.** 3110 số. **D.** 313 số.

b. (1 điểm): Một trong 3 chữ số đầu tiên phải bằng 1.

A. 2280 số. **B.** 2820 số. **C.** 2802 số. **D.** 8220 số.

Câu III. (2 điểm): Giải phương trình:

$$C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + C_x^{x-3} + \dots + C_x^{x-8} + C_x^{x-9} + C_x^{x-10} = 1023.$$

A. x = 10. **B.** x = 8. **C.** x = 4. **D.** x = 2.

Câu IV. (4 điểm): Cho $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{9}$ và $P(A \mid B) = \frac{1}{2}$. Tính:

a. (2 điểm): $P(\overline{A}B)$.

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

b. (2 điểm): $P(B \mid \overline{A})$.

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian 60 phút)

Câu I. (2 điểm): Chứng minh rằng:

$$n^n < (n!)^2 < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}, \text{ với } n \in \mathbf{Z}, n > 2.$$

Câu II. (2 điểm): Một câu lạc bộ có 25 thành viên.

a. (1 điểm): Có bao nhiêu cách chọn 4 thành viên vào ủy ban thường trực ?

A. 26501. **B.** 26150. **C.** 21650. **D.** 12650.

b. (1 điểm): Có bao nhiêu cách chọn chủ tịch, phó chủ tịch, thư ký và thủ quỹ ?

A. 33600. **B.** 303600. **C.** 30360. **D.** 30300.

Câu III. (2 điểm): Tính giá trị của biểu thức sau:

$$A = 2^8.3^8 C_8^0 + 2^7.3^7 C_8^1 + \ldots + C_8^8.$$

A. 16807. **B.** 117649. **C.** 823543. **D.** 5764801.

Câu IV. (4 điểm): Xác suất để một học sinh thi đỗ đại học lần đầu là 0,6. Nếu thi trượt thì học sinh đó thi lại và xác suất đỗ của lần thi lại là 0,75. Chọn ngẫu nhiên một học sinh. Tính xác suất để anh ta:

a. (2 điểm): Không thi đỗ lần đầu.

A. 0,75. **B.** 0,6. **C.** 0,4. **D.** 0,25.

b. (2 điểm): Thi đỗ.

A. 0,8125. **B.** 0,87. **C.** 0,9. **D.** 0,9375.

ĐỀ SỐ 3

(Thời gian 60 phút)

Câu I. (2 điểm): Rút gọn biểu thức:

$$M = \frac{\left(\frac{P_5}{A_5^4} + \frac{P_4}{A_5^3} + \frac{P_3}{A_5^2} + \frac{P_2}{A_5^1}\right) A_5^2}{(P_3 - 2P_2)}.$$

Câu II. (2 điểm): Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 .

a. (1 điểm): Lập được bao nhiêu số có 10 chữ số mà trong mỗi số, chữ số 5 có mặt đúng 4 lần, các chữ số khác, mỗi chữ số có mặt đúng 1 lần ?

A. 136080 số. **B.** 36080 số. **C.** 16080 số. **D.** 13080 số.

b. (1 điểm): Lập được bao nhiêu số có 10 chữ số mà trong mỗi số chữ số 2 có mặt đúng 3 lần, chữ số 4 có mặt đúng 2 lần và các chữ số khác, mỗi chữ số có mặt đúng 1 lần ?

A. 72160 số. **B.** 22160 số. **C.** 27160 số. **D.** 272160 số.

Câu III. (2 điểm): Tính giá trị của biểu thức sau:

$$B = 2^9.5^9 C_9^0 - 2^8.5^8.3 C_9^1 + \dots + 3^9 C_9^9.$$

A. 117649. **B.** 823543. **C.** 5764801. **D.** 40353607.

Câu IV. (4 điểm): Mẹ Minh đề nghị thưởng cho Minh 90.000 đồng để mua một vật kỷ niệm nào đó, nếu Minh được điểm giỏi ở cả bốn môn học: Toán, Ngoại ngữ, Tin học, Thể dục (việc đạt điểm giỏi ở các môn là độc lập). Xác suất đạt điểm giỏi của Minh đối với bốn môn học trên tương ứng là: 0,9; 0,7; 0,8 và 0,6. Ông của Minh đề nghị mỗi môn học trên, môn nào được điểm giỏi thì thưởng 10.000 đồng.

a. (2 điểm): Tính số tiền thưởng trung bình của Minh nếu theo phương án của Mẹ.

A. 27216. **B.** 22716. **C.** 22176. **D.** 22167.

b. (2 điểm): Tính số tiền thưởng trung bình của Minh nếu theo phương án của Ông.

A. 10.000. **B.** 20.000. **C.** 30.000. **D.** 40.000.

CHƯƠNG II

DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

CHỦ ĐỀ 1

DÃY SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

***Định nghĩa**: Dãy số (u_n) là một ánh xạ từ $\boldsymbol{N^*}$ vào $\boldsymbol{R}$:*

$$f : \boldsymbol{N^*} \to \boldsymbol{R}$$

Khi đó, ta có $u_n = f(n)$.

Kí hiệu (u_n) hay ở dạng khai triển là $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

2. CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT DÃY SỐ

Một dãy số thường được xác định bằng một trong các cách:

Cách 1: Dãy số xác định bởi một công thức cho số hạng tổng quát u_n.

Thí dụ 1: Dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = 8n + 1$. Khi đó, nếu viết dãy số này dưới dạng khai triển, ta được 9, 17, 25, …, $8n + 1$, ….

Cách 2: Dãy số xác định bởi một công thức truy hồi, tức là:

- Trước tiên, cho số hạng đầu (hoặc vài số hạng đầu).
- Cho công thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

Thí dụ 2:

a. Dãy số (a_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2a_{n-1}, \text{ với } n \geq 2 \end{cases}.$$

Khi đó, nếu viết dãy số này dưới dạng khai triển, ta được:

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16, a_5 = 32, \ldots$$

Dễ thấy rằng, dãy số (a_n) xác định bởi $a_n = 2^n$.

b. Dãy số (b_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} b_1 = b_2 = 1 \\ b_n = b_{n-2} + b_{n-1}, \text{ với } n \geq 3 \end{cases}.$$

Khi đó, nếu viết dãy số này dưới dạng khai triển, ta được:

$$b_1 = 1,\ b_2 = 1,\ b_3 = 2,\ b_4 = 3,\ b_5 = 5,\ \ldots$$

Dãy số này được gọi là *dãy số Phibônaxi*.

Cách 3: Dãy số xác định bởi một mệnh đề mô tả các số hạng liên tiếp của nó.

Thí dụ 3: Cho dãy số (u_n) với u_n là chữ số thứ n trong cách viết thập phân của số π, khi đó ta có dãy số:

$$u_1 = 3,\ u_2 = 1,\ u_3 = 4,\ u_4 = 1,\ u_5 = 5,\ \ldots$$

Trong trường hợp này ta không tìm được công thức biểu thị số hạng u_n qua n.

3. DÃY SỐ ĐƠN DIỆU

Định nghĩa 1 (*Dãy số tăng*): *Dãy số (u_n) được gọi là tăng nếu* $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n < u_{n+1}$.

Vậy, với dãy số (u_n) tăng, ta có $u_1 < u_2 < u_3 < \ldots < u_n < \ldots$.

Thí dụ 4:

a. Dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = 2n + 1$ là dãy số tăng.

b. Với dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = n - 6$, dễ thấy nó không phải là dãy số tăng.

Định nghĩa 2 (*Dãy số giảm*): *Dãy số (u_n) được gọi là giảm nếu* $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n > u_{n+1}$.

Vậy, với dãy số (u_n) giảm, ta có $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$.

Thí dụ 5:

a. Dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ là dãy số giảm.

b. Với dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, dễ thấy nó không phải là dãy số tăng hoặc giảm.

4. DÃY SỐ BỊ CHẶN

Định nghĩa 3 (*Dãy số bị chặn trên*): *Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu:*

$$\exists \mathbf{M} \in \mathbf{R} : u_n \le \mathbf{M},\ \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Thí dụ 6:

a. Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ bị chặn trên bởi $\dfrac{1}{2}$. Như vậy, dễ thấy mọi dãy số (u_n) giảm luôn bị chặn trên bởi u_1.

b. Với dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = n$, dễ thấy nó không bị chặn trên.

Định nghĩa 4 (*Dãy số bị chặn dưới*): *Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu:*

$$\exists m \in \mathbf{R} : u_n \ge m,\ \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Thí dụ 7:

a. Dãy số (u_n) với $u_n = 2n + 1$ bị chặn dưới bởi 3. Như vậy, dễ thấy mọi dãy số (u_n) tăng luôn bị chặn dưới bởi u_1.

b. Với dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = -n$, dễ thấy nó không bị chặn dưới.

***Định nghĩa 5** (Dãy số bị chặn): Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là:*

$$\exists m, M \in \mathbf{R} : m \le u_n \le M, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Thí dụ 8:

a. Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n-1}{n}$, ta có:

- Bị chặn trên bởi 1, vì $u_n = \dfrac{n-1}{n} = 1 - \dfrac{1}{n} < 1, \forall n \in \mathbf{N}^*$.
- Bị chặn dưới bởi 0, vì $u_n = \dfrac{n-1}{n} \ge 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

b. Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n.n$, không bị chặn trên và không bị chặn dưới.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Mở đầu về dãy số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với giả thiết cho dãy số (u_n) dưới dạng công thức tổng quát hoặc biểu thức truy hồi và câu hỏi thường được đặt ra là:

- Hãy viết k số hạng đầu của dãy số hoặc tìm u_k. Câu hỏi này được thực hiện bằng phép thế.
- Xác định xem a là số hạng thứ mấy của dãy số. Câu hỏi này được thực hiện bằng việc giải phương trình ẩn n.

…

Ví dụ 1: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n}$.

a. Tìm u_9, u_{12}, u_{2n}, u_{2n+1}.

b. Tìm xem 0 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

Giải

a. Ta có:

$$u_9 = \frac{(-1)^9 + 1}{9} = 0; \quad u_{12} = \frac{(-1)^{12} + 1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$u_{2n} = \frac{(-1)^{2n} + 1}{2n} = \frac{1}{n}; \quad u_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1} + 1}{2n+1} = 0.$$

b. Từ kết quả câu a) ta thấy ngay mọi số hạng lẻ của dãy số đều nhận giá trị bằng 0.

Ví dụ 2: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 15, u_2 = 9 \\ u_n = u_{n-2} - u_{n-1}, n \geq 3 \end{cases}.$$

a. Hãy viết 6 số hạng đầu của dãy số.

b. Tìm xem −3 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

Giải

a. Ta lần lượt có:

$u_1 = 15;\ u_2 = 9;\ u_3 = -6;\ u_4 = -15;\ u_5 = -9;\ u_6 = 6.$

b. Dễ thấy mọi số hạng của dãy số đều không nhận giá trị bằng − 3.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}$.

a. Viết 6 số hạng đầu của dãy.

b. Tìm xem $\dfrac{19}{17}$ là số hạng thứ mấy của dãy số ?

Bài tập 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+36}}$.

a. Viết 5 số hạng đầu của dãy.

b. Tìm xem $\dfrac{7}{10}$ là số hạng thứ mấy của dãy số ?

Bài tập 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{(-1)^n + n}{n+1}$.

a. Tìm $u_9, u_{12}, u_{2n}, u_{2n+1}$.

b. Tìm xem 0 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

c. Tìm xem 1 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

Bài tập 4. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, n \geq 3 \end{cases}.$$

a. Hãy viết 6 số hạng đầu của dãy số.

b. Tìm xem 511 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

Bài tập 5. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 3 \\ u_n = 3u_{n-2} - 2u_{n-1}, n \geq 3 \end{cases}.$$

a. Tìm u_4, u_8.

b. Tìm xem 11 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

Bài toán 2: Sử dụng phương pháp quy nạp chứng minh dãy số (u_n) thoả mãn tính chất K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: (*Bước cơ sở*): Chứng minh rằng số hạng u_1 thoả mãn tính chất K.

Bước 2: (*Bước quy nạp*): Giả sử số hạng u_k thoả mãn tính chất K. Ta đi chứng minh số hạng u_{k+1} cũng thoả mãn tính chất K.

Bước 3: Kết luận dãy số (u_n) thoả mãn tính chất K.

Ví dụ 1: Cho dãy số (u_n) với $u_n = n^3 + 11n$. Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số này đều chia hết cho 6.

Giải

Ta có:

$$u_1 = 1^3 + 11 = 12 \Rightarrow u_1 \vdots 6.$$

Giả sử $u_k \vdots 6$, tức là $(k^3 + 11k) \vdots 6$. Ta đi chứng minh $u_{k+1} \vdots 6$.

Thật vậy:

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= (k+1)^3 + 11(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 \\ &= (k^3 + 11k) + 3k(k+1) + 12 \end{aligned}$$

suy ra $u_{k+1} \vdots 6$ bởi $(k^3 + 11k) \vdots 6$, $3k(k+1) \vdots 6$ và $12 \vdots 6$.

Vậy, mọi số hạng của dãy số (u_n) đều chia hết cho 6.

Ví dụ 2: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-2} + 2u_{n-1},\ n \geq 3 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $u_n < 6u_{n-2}, \forall n \geq 5$.

Giải

Ta có:

$$u_3 = 3,\ u_4 = 7,\ u_5 = 17 \Rightarrow u_5 < 6u_3.$$

Giả sử công thức đúng với mọi $n \leq k$, tức là:

$$\begin{cases} u_k < 6u_{k-2} \\ u_{k-1} < 6u_{k-3} \end{cases}$$

ta đi chứng minh $u_{k+1} < 6u_{k-1}$.

Thật vậy:

$$u_{k+1} = u_{k-1} + 2u_k < 6u_{k-3} + 2.6u_{k-2} = 6(u_{k-3} + 2u_{k-2}) = 6u_{k-1}, \text{ đpcm.}$$

Vậy, ta luôn có $u_n < 6u_{n-2}, \forall n \geq 5$.

Ví dụ 3: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}},\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $u_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

Giải

Ta có:

$$u_1 = \sqrt{2} = 2.\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^2} \Rightarrow \text{đúng với } n = 1.$$

Giả sử $u_k = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{k+1}}$. Ta đi chứng minh $u_{k+1} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{k+2}}$.

Thật vậy:

$$u_{k+1} = \sqrt{2 + u_k} = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}} = \sqrt{2\left(1 + \cos\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}$$

$$= \sqrt{2.2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}} = 2\left|\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}\right| = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}},$$

do $0 < \dfrac{\pi}{2^{k+2}} < \dfrac{\pi}{2}$ nên $\cos\dfrac{\pi}{2^{k+2}} > 0$.

Vậy, ta luôn có $u_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 13^n - 1$. Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số này đều chia hết cho 6.

Bài tập 2. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = 2u_{n-2} + u_{n-1},\ n \geq 3 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số này đều là số lẻ.

Bài tập 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2^{n+2}$. Chứng minh rằng $u_n > 2n + 5$.

Bài tập 4. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1,\ u_2 = 2 \\ u_n = u_{n-2} + 2u_{n-1},\ n \geq 3 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $u_n \leq \left(\dfrac{5}{2}\right)^n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Bài tập 5. * Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_n = c.u_{n-1} + d.u_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}, \text{ với } cd \neq 0.$$

Chứng minh rằng $u_n = (e_1 + ne_2)r^n$ với e_1, e_2 là các hằng số phụ thuộc a, b và r là nghiệm kép của phương trình $x^2 - cx - d = 0$.

Áp dụng: Cho dãy số:

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = -3 \\ a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $a_n = 3^{n-1} - 2(n-1).3^{n-1}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Hướng dẫn: Vì r là nghiệm kép của phương trình $x^2 - cx - d = 0$ nên $c = 2r$ và $d = -r^2$, do đó u_n có dạng $u_n = 2ru_{n-1} - r^2u_{n-2}$.

Bài tập 6. * Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_n = c.u_{n-1} + d.u_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}, \text{ với } cd \neq 0.$$

Chứng minh rằng $u_n = e_1r_1^n + e_2r_2^n$ với e_1, e_2 là các hằng số phụ thuộc a, b và r_1, r_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2 - cx - d = 0$.

Áp dụng: Cho dãy số:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right], \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Hướng dẫn: Chứng minh bằng quy nạp.

Bài toán 3: Xác định công thức của dãy số (u_n).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Sử dụng biến đổi đại số để thu gọn và đơn giản biểu thức của u_n.

Cách 2: Sử dụng phương pháp quy nạp bằng việc thực hiện theo các bước:

- *Bước 1:* Viết một vài số hạng đầu của dãy, từ đó dự đoán công thức cho u_n.
- *Bước 2:* Chứng minh công thức dự đoán bằng phương pháp quy nạp.

Ví dụ 1: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + 2,\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính u_n theo n.

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Từ giả thiết ta có:

$u_1 = 1$

$u_2 = u_1 + 2$

$u_3 = u_2 + 2$

...

$u_n = u_{n-1} + 2$

Cộng theo vế các đẳng thức trên, ta được:

$u_n = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1.$

Vậy, ta có $u_n = 2n - 1$.

Cách 2: Ta có:

$u_1 = 1 = 2.1 - 1$

$u_2 = 1 + 2 = 3 = 2.2 - 1$

$u_3 = 3 + 2 = 5 = 2.3 - 1$

Dự đoán $u_n = 2n - 1$. (1)

Ta đi chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp, thật vậy:

$u_1 = 2.1 - 1 = 1$, tức là công thức (1) đúng với n = 1.

Giả sử công thức (1) đúng với n = k, tức là $u_k = 2k - 1$. Ta đi chứng minh nó cũng đúng với n = k + 1.

Thật vậy:

$u_{k+1} = u_k + 2 = 2k - 1 + 2 = 2(k + 1) - 1$, tức là (1) đúng với n = k + 1.

Vậy, ta có $u_n = 2n - 1$.

Ví dụ 2: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ với mọi $n \in \mathbf{N}^*$ và dãy số (S_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} S_1 = u_1 \\ S_n = S_{n-1} + u_n,\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính S_n theo n.

Giải

Ta có ngay:

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$

Mặt khác, ta có biểu diễn:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Từ đó, ta nhận được:

$$u_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

...

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên, ta được:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Vậy, ta có $S_n = \frac{n}{n+1}$.

Ví dụ 3: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 3u_{n-1},\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính u_n theo n.

Giải

Ta có:

$u_1 = 1 = 3^0$

$u_2 = 3 = 3^1$

$u_3 = 3.3 = 3^2$

Dự đoán $u_n = 3^{n-1}$. (1)

Ta đi chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp, thật vậy:

$u_1 = 3^{1-1} = 1$, tức là công thức (1) đúng với n = 1.

Giả sử công thức (1) đúng với n = k, tức là $u_k = 3^{k-1}$. Ta đi chứng minh nó cũng đúng với n = k + 1.

Thật vậy:

$u_{k+1} = 3u_k = 3.3^{k-1} = 3^k$, tức là (1) đúng với n = k + 1.

Vậy, ta có $u_n = 3^{n-1}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_n = 2u_{n-1},\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính u_n theo n.

Bài tập 2. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}},\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính u_n theo n.

Bài tập 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2}{n^2 + 4n + 3}$ với mọi $n \in \mathbf{N}^*$ và dãy số (S_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} S_1 = u_1 \\ S_n = S_{n-1} + u_n,\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính S_n theo n.

Bài tập 4. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_n = \dfrac{1}{3} u_{n-1},\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính u_n theo n.

Bài tập 5. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \dfrac{3}{u_{n-1}},\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính u_n theo n.

Bài toán 4: Xét tính đơn điệu của một dãy số (u_n).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập hiệu $H = u_{n+1} - u_n$, từ đó xác định dấu của H.

Bước 2: Khi đó:

- Nếu $H > 0$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$ thì dãy số (u_n) tăng.
- Nếu $H < 0$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$ thì dãy số (u_n) giảm.

Cách 2: Nếu $u_n > 0$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ta có thể thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập tỉ số $P = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, từ đó so sánh P với 1.

Bước 2: Khi đó:

- Nếu $P > 1$ với $\forall\ n \in \mathbf{N}^*$ thì dãy số (u_n) tăng.
- Nếu $P < 1$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$ thì dãy số (u_n) giảm.

Ví dụ 1: Xét tính đơn điệu của các dãy số sau:

a. $u_n = \dfrac{n}{3^n}$.   b. $u_n = n + \cos^2 n$.   c. $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Giải

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Xét hiệu:

$$H = u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{3^{n+1}} - \frac{n}{3^n} = \frac{n+1-3n}{3^{n+1}} = \frac{1-2n}{3^{n+1}} < 0, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Vậy, dãy (u_n) giảm.

Cách 2: Dễ thấy $u_n > 0$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$, xét tỉ số:

$$P = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}}.\frac{3^n}{n} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

do $1 + \dfrac{1}{n} < 2$ nên $P < 1$.

Vậy, dãy (u_n) giảm.

b. Xét hiệu:

$$H = u_{n+1} - u_n = n + 1 + \cos^2(n+1) - (n + \cos^2 n) = 1 - \cos^2 n + \cos^2(n+1)$$
$$= \sin^2 n + \cos^2(n+1) > 0, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Vậy, dãy (u_n) tăng.

c. Xét hiệu:

$$H = u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(-\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ta thấy ngay dấu của H phụ thuộc vào tính chẵn, lẻ của n.

Vậy, dãy (u_n) không đơn điệu.

Ví dụ 2: Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n), biết:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, n \geq 2 \end{cases}.$$

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Xét hiệu:

$$H = u_{n+1} - u_n = (2u_n + 1) - u_n = u_n + 1.$$

Ta sẽ đi chứng minh $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ bằng quy nạp.

Ta có:

$u_1 = 1 > 0$, tức công thức đúng với $n = 1$.

Giả sử công thức đúng với $n = k$, tức là $u_k > 0$, ta đi chứng minh $u_{k+1} > 0$.

Thật vậy:

$u_{k+1} = 2u_k + 1 > 0$, đpcm.

Vậy, ta luôn có $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Do đó $H > 0$, từ đó suy ra dãy (u_n) tăng.

Cách 2: Trước tiên, ta đi chứng minh $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ (*tương tự như trong cách 1*)

Xét tỉ số:

$$P = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2u_n + 1}{u_n} = 2 + \frac{1}{u_n} > 1$$

Vậy, dãy (u_n) tăng.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Xét tính đơn điệu của các dãy số sau:

a. $u_n = \frac{n}{4^n}$.

b. $u_n = n + \sin^2 n$.

c. $u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

d. $u_n = \frac{1-n}{n}$.

e. $u_n = \frac{1}{n^2+1}$.

f. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Bài tập 2. Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n), biết:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1} - 1, n \geq 2 \end{cases}.$$

Bài tập 3. Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n), biết:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Bài tập 4. Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n), biết:

$$u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} \text{ (n dấu căn).}$$

Bài tập 5. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n^2+n}$ và dãy số (S_n) xác định như sau

$$\begin{cases} S_1 = u_1 \\ S_n = S_{n-1} + u_n,\ n \geq 2 \end{cases}$$

a. **Xét tính đơn điệu của các dãy số (u_n) và (S_n).**

b. **Xác định công thức tính S_n theo n.**

Bài tập 6. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1}$ và dãy số (P_n) với:

$$P_n = u_1.u_2\ldots u_n.$$

a. **Xét tính đơn điệu của các dãy số (u_n) và (P_n).**

b. **Xác định công thức tính P_n theo n.**

Bài toán 5: Xét tính bị chặn của một dãy số (u_n).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng định nghĩa:

- Nếu $\exists M \in \mathbf{R} : u_n \leq M, \forall n \in \mathbf{N}^*$ thì (u_n) bị chặn trên.
- Nếu $\exists m \in \mathbf{R} : u_n \geq m, \forall n \in \mathbf{N}^*$ thì (u_n) bị chặn dưới.
- Nếu $\exists m, M \in \mathbf{R} : m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbf{N}^*$ thì (u_n) bị chặn.

Chú ý: Dựa trên kết quả:

- Mọi dãy số (u_n) giảm luôn bị chặn trên bởi u_1.
- Mọi dãy số (u_n) tăng luôn bị chặn dưới bởi u_1.

Ví dụ 1: Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của các dãy số sau:

a. $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$. b. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. c. $u_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$.

Giải

a. Viết lại u_n dưới dạng:

$$u_n = n + \frac{1}{n} \overset{\text{Côsi}}{\geq} 2 \Rightarrow (u_n) \text{ bị chặn dưới bởi } 2.$$

Ta thấy ngay giá trị của u_n có thể lớn bao nhiêu tuỳ ý, do đó (u_n) không bị chặn trên.

Vậy, dãy (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn.

b. Ta thấy ngay:

- $u_n > 0$, do đó nó bị chặn dưới.
- Vì $n(n+1) \geq 2 \Leftrightarrow u_n \leq \dfrac{1}{2}$, do đó nó bị chặn trên.

Vậy, ta được $0 < u_n \leq \dfrac{1}{2}$, do đó nó bị chặn.

c. Ta thấy ngay:

- $u_n \ge 0$, do đó nó bị chặn dưới.
- Ta đi chứng minh $u_n \le 1$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$ bằng việc sử dụng biến đổi đại số, cụ thể:

$$\frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}} \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{n^2+1} \ge n-1 \Leftrightarrow n^2+1 \ge n^2-2n+1$$

$\Leftrightarrow n \ge 0$, luôn đúng.

Vậy, ta luôn có $u_n \le 1$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, tức là (u_n) bị chặn dưới bởi 1.

Vậy, ta được $0 \le u_n \le 1$, do đó nó bị chặn.

Ví dụ 2: Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của dãy số sau:

$$u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

từ đó, ta thấy:

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$\Rightarrow 0 \le u_n < 1.$

Vậy, dãy (u_n) bị chặn.

Ví dụ 3: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}+1}{2}, n \ge 2 \end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng (u_n) bị chặn dưới bởi 1.

b. Chứng minh rằng (u_n) giảm. Suy ra (u_n) bị chặn.

Giải

a. Ta đi chứng minh $u_n > 1$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp.

Ta có:

$u_1 = 2 > 1$, tức công thức đúng với $n = 1$.

Giả sử công thức đúng với $n = k$, tức là $u_k > 1$, ta đi chứng minh $u_{k+1} > 1$.

Thật vậy:

$$u_{k+1} = \frac{u_k + 1}{2} > \frac{1+1}{2} = 1, \text{ đpcm.}$$

Vậy, ta luôn có $u_n > 1$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, tức là (u_n) bị chặn dưới bởi 1.

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Xét hiệu:

$$H = u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 1}{2} - u_n = \frac{1 - u_n}{2} < \frac{1-1}{2} = 0.$$

Vậy, dãy (u_n) giảm.

Cách 2: Xét tỉ số:

$$P = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n + 1}{2u_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2u_n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Vậy, dãy (u_n) giảm.

Từ đó, suy ra $1 < u_n \le 2$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$, do đó (u_n) bị chặn.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của các dãy số sau:

a. $u_n = \frac{n^2 - 1}{2n}$. b. $u_n = \frac{1}{n^2 - 1}$. c. $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$.

Bài tập 2. Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của các dãy số sau:

a. $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + ... + \frac{1}{n(n+2)}$.

b. $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Bài tập 3. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1} + 8}{2}, n \ge 2 \end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng (u_n) bị chặn trên bởi 8.

b. Chứng minh rằng (u_n) tăng. Suy ra (u_n) bị chặn.

Bài tập 4. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}, n \ge 2 \end{cases}.$$

a. Tìm công thức biểu diễn u_n theo n.

b. Chứng minh rằng (u_n) bị chặn.

Bài tập 5. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1} + 2}{u_{n-1} + 1}, n \ge 2 \end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng (u_n) bị chặn trên bởi $\frac{3}{2}$.

b. Chứng minh rằng (u_n) bị chặn dưới bởi 1.

CHỦ ĐỀ 2

CẤP SỐ CỘNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = u \\ u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

(u, d là hai số thực cho trước) được gọi là cấp số cộng.

- u là số hạng đầu tiên.
- d là công sai.

Đặc biệt khi $d = 0$ thì (u_n) là dãy số trong đó tất cả các số hạng đều bằng nhau.

2. CÁC TÍNH CHẤT

- Số hạng thứ n được cho bởi công thức:

$$u_n = u_1 + (n - 1)d.$$

- u_n, u_{n+1}, u_{n+2} là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng (u_n) nếu:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n+2}).$$

- Tổng của n số hạng đầu tiên S_n được cho bởi công thức:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

$$= \frac{n}{2}[2u_1 + (n - 1)d].$$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Chứng minh tính chất của một cấp số cộng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Câu hỏi thường được đặt ra là:

" *Cho ba số a, b, c lập thành cấp số cộng, chứng minh tính chất K* "

khi đó, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Từ giả thiết a, b, c lập thành một cấp số cộng, ta được:

$$a + c = 2b$$

hoặc biểu thức tương đương $a - b = b - c = \frac{1}{2}(a - c)$.

Bước 2: Chứng minh tính chất K.

Ví dụ 1: Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

$$a^2 + 2bc = c^2 + 2ab.$$

Giải

Từ giả thiết a, b, c lập thành một cấp số cộng, ta được:

$$a + c = 2b.$$

Khi đó:

$$a^2 + 2bc = a^2 + (a + c)c = a^2 + ac + c^2 = a(a + c) + c^2 = 2ab + c^2, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 2: Cho (a_n) là một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-k} + a_{n+k}), \text{ với mọi } n > k.$$

Giải

Ta có ngay:

$$a_n = a_{n-k} + (n - n + k)d = a_{n-k} + kd$$
$$a_{n+k} = a_{n-k} + (n + k - n + k)d = a_{n-k} + 2kd$$

suy ra:

$$\frac{1}{2}(a_{n-k} + a_{n+k}) = \frac{1}{2}(a_{n-k} + a_{n-k} + 2kd) = a_{n-k} + kd = a_n, \text{ đpcm.}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

$$a^2 + 8bc = (2b + c)^2.$$

Bài tập 2. Cho (a_n) là một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

a. $a_1 + a_n = a_k + a_{n-k+1}$, với $k = 1, 2, \ldots, n$.

b. $(q - r)a_p + (r - p)a_q + (p - q)a_r = 0$.

c. $$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}},$$

với $a_i > 0$, $i = \overline{1, n}$.

Bài tập 3. Cho (a_n) là một cấp số cộng. Hỏi các dãy số sau có phải là cấp số cộng không ?

a. $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2n-1}, \ldots$

b. $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2n}, \ldots$

Bài tập 4. Cho (a_n) là một cấp số cộng. Hỏi các dãy số sau có phải là cấp số cộng không ?

a. $(a_n + p)$, với p là số thực tuỳ ý.

b. $(p.a_n)$, với p là số thực tuỳ ý.

c. $\left(\frac{p}{a_n}\right)$, với p là số thực tuỳ ý.

Bài toán 2: Chứng minh ba số lập thành một cấp số cộng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh ba số a, b, c lập thành cấp số cộng, ta đi chứng minh:

$$a + c = 2b \text{ hoặc } a - b = b - c.$$

Ví dụ 1: Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số $(a^2 + ab + b^2)$, $(a^2 + ac + c^2)$, $(b^2 + bc + c^2)$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Giải

Từ giả thiết a, b, c lập thành một cấp số cộng, ta được:

$$a + c = 2b.$$

Nhận xét rằng:

$$\begin{aligned}(a^2 + ab + b^2) + (b^2 + bc + c^2) &= a^2 + (ab + bc) + 2b^2 + c^2\\ &= a^2 + b(a + c) + 2b^2 + c^2 = a^2 + 4b^2 + c^2\\ &= a^2 + (a + c)^2 + c^2 = 2(a^2 + ac + c^2).\end{aligned}$$

Vậy, ba số $(a^2 + ab + b^2)$, $(a^2 + ac + c^2)$, $(b^2 + bc + c^2)$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Ví dụ 2: Cho ba số dương a, b, c lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Giải

Từ giả thiết a, b, c lập thành một cấp số cộng, ta được:

$$a + c = 2b \Leftrightarrow a - b = b - c = \frac{1}{2}(a - c).$$

Nhận xét rằng:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} &= \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{b-c} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}\\ &= \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{a-b} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}\\ &= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\frac{1}{2}(a-c)} = \frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

Vậy, ba số $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số $(a+b)^2$, c^2+2c, $4(a+b)+2$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Bài tập 2. Cho ba số a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng có công sai khác 0. Chứng minh rằng ba số $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Bài toán 3: Tìm điều kiện của tham số để ba số lập thành một cấp số cộng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để ba số a, b, c lập thành cấp số cộng, điều kiện là:

$a + c = 2b$, bài toán được chuyển về việc giải phương trình.

Ví dụ 1: Tìm x để ba số x^2+1, $x-2$, $1-3x$ lập thành một cấp số cộng.

Giải

Để ba số x^2+1, $x-2$, $1-3x$ lập thành một cấp số cộng, điều kiện là:

$$(x^2+1)+(1-3x)=2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=3.$$

Vậy, với x = 2 hoặc x = 3 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Một bài toán rất quen thuộc đối với phương trình trùng phương là:

" *Tìm điều kiện của tham số sao cho phương trình:*

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,\ \text{với}\ a\neq 0 \qquad (1)$$

có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 *lập thành cấp số cộng* "

Ta thực hiện như sau:

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng, khi đó:

$$x_1+x_3=2x_2,$$

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a} \Leftrightarrow 3x_2=-\frac{b}{a} \Leftrightarrow x_2=-\frac{b}{3a}.$$

Với $x_2=-\frac{b}{3a}$ thay vào (1) ta được:

$$a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(-\frac{b}{3a}\right)+d=0$$

$$\Leftrightarrow 2b^3-9abc+27a^2d=0. \qquad (2)$$

Đó chính là điều kiện cần để (1) có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Điều kiện đủ: Từ (2) suy ra phương trình có nghiệm $x_2 = -\frac{b}{3a}$. Khi đó:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x_1 + x_3 - \frac{b}{3a} = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x_1 + x_3 = -\frac{2b}{3a} = 2x_2$$

$\Leftrightarrow x_1, x_2, x_3$ lập thành cấp số cộng.

Vậy, điều kiện cần và đủ để (1) có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng là:

$$2b^3 - 9abc + 27a^2d = 0.$$

Với bài toán một tham số m, trong điều kiện đủ ta có thể khẳng định bằng việc chỉ ra nghiệm cụ thể của phương trình. Hãy nhớ điều này rất quan trọng bởi khi đó ta còn phải khẳng định phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 2: Xác định m để phương trình:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0 \qquad (1)$$

có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Giải

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng, khi đó:

$$x_1 + x_3 = 2x_2, \qquad (*)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Leftrightarrow 3x_2 = 3 \Leftrightarrow x_2 = 1.$$

Với $x_2 = -1$ thay vào (1) ta được:

$$11 - m = 0 \Leftrightarrow m = 11.$$

Đó chính là điều kiện cần để (1) có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Điều kiện đủ: Với m=11, ta được:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{12} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 + \sqrt{12} \end{array}\right.$$, thoả mãn (*)

Vậy, với m=11 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Trong bài toán trên ở điều kiện đủ ta khẳng định được:

- Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.
- Ta có $x_1 + x_3 = 2x_2$, tức là x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng.
- Do đó, có kết luận m = 11 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Tuy nhiên, tồn tại bài toán mà các giá trị của tham số tìm được trong điều kiện cần không thoả mãn điều kiện đủ.

Bài toán trên có thể được giải bằng phương pháp hằng số bất định, như sau:

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng

$\Leftrightarrow$ (1) có ba nghiệm $x_0 - d$, x_0, $x_0 + d$, với $d \neq 0$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - 9x + m &= [x - (x_0 - d)](x - x_0)[x - (x_0 + d)] \\ &= (x - x_0)[(x - x_0)^2 - d^2] \\ &= x^3 - 3x_0x^2 + (3x_0^2 - d^2)x - x_0^3 + d^2x_0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 = -3x_0 \\ -9 = 3x_0^2 - d^2 \\ m = -x_0^3 + d^2x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ d = \pm 2\sqrt{3} \\ m = 11 \end{cases}.$$

Vậy, với m=11 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Một bài toán rất quen thuộc đối với phương trình trùng phương là:

"*Tìm điều kiện của tham số để phương trình*

$$ax^4 + bx^2 + c = 0. \qquad (1)$$

có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng."

Khi đó, ta thực hiện như sau:

Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$at^2 + bt + c = 0. \qquad (2)$$

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt dương $0 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ -b/a > 0 \\ c/a > 0 \end{cases} \qquad (3)$$

và khi đó bốn nghiệm của (1) là $-\sqrt{t_2}$, $-\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_2}$.

Bốn nghiệm trên lập thành cấp số cộng khi:

$$\begin{cases} -\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} = -2\sqrt{t_1} \\ -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1. \qquad (4)$$

Theo định lí Viét ta có:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -b/a \\ t_1t_2 = c/a \end{cases}. \qquad (I)$$

Thay (4) vào (I) được :

$$\begin{cases} t_1 + 9t_1 = -b/a \\ t_1.(9t_1) = c/a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -\dfrac{b}{10a} \\ t_1^2 = \dfrac{c}{9a} \end{cases} \Rightarrow \left(-\dfrac{b}{10a}\right)^2 = \dfrac{c}{9a}. \qquad (5)$$

Kết hợp (5) và (3) nhận được điều kiện của tham số.

Để minh hoạ chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: Cho phương trình:

$$x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0. \qquad (1)$$

Xác định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Giải

Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0 \qquad (2)$$

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương $0 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ -b/a > 0 \\ c/a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 2m - 1 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \\ 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \neq 0,$$

và khi đó bốn nghiệm của (1) là $-\sqrt{t_2}$, $-\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_2}$.

Bốn nghiệm trên lập thành cấp số cộng khi :

$$\begin{cases} -\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} = -2\sqrt{t_1} \\ -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1. \qquad (3)$$

Theo định lí Viét ta có:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+1) \\ t_1 t_2 = 2m + 1 \end{cases} \qquad (I)$$

Thay (3) vào (I) được :

$$\begin{cases} t_1 + 9t_1 = 2(m+1) \\ t_1.(9t_1) = 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t_1 = m + 1 \\ 9t_1^2 = 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow 9m^2 - 32m - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -\dfrac{4}{9} \end{array}\right. .$$

Vậy, với $m = 4$ hoặc $m = -\dfrac{4}{9}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm x để ba số sau lập thành một cấp số cộng:

a. $x^2 - x + 1, x - 2, 1 - 2x$.

b. $x^3 + x^2 + 1, x^2 + 1, x^2 - x + 1$.

Bài tập 2. Xác định a, b để phương trình:

$$x^3 + ax + b = 0$$

có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng.

Bài tập 3. Cho phương trình:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3. Chứng minh rằng 3 nghiệm đó lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $2a^3 - 9ab + 27c = 0$.

Bài tập 4. Xác định m để các phương trình sau có các nghiệm lập thành một cấp số cộng :

a. $x^3 - 3x^2 + mx + 2 - m = 0$.

b. $2x^4 + mx^2 + 2 = 0$.

c. $x^4 - 2(m + 1)x^2 + 2m + 1 = 0$.

d. $mx^4 - 2(m - 1)x^2 + m - 1 = 0$.

Bài toán 4: Tìm các phần tử của một cấp số cộng (u_n).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thông thường bài toán được chuyển về xác định u_1 và công sai d.

Ví dụ 1: Cho cấp số cộng (u_n) thoả mãn $u_2 - u_3 + u_5 = 10$ và $u_1 + u_6 = 17$

a. Tìm số hạng đầu tiên và công sai.

b. Tính tổng số của 20 số hạng đầu tiên.

c. Tính tổng $S' = u_5 + u_6 + \ldots + u_{24}$.

Giải

a. Gọi d là công sai của cấp số cộng (u_n), ta có:

$$\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + d) - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 10 \\ u_1 + (u_1 + 5d) = 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}.$$

Vậy, cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và $d = 3$.

b. Ta có:

$$S_{20} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{20}$$

$$= \frac{20}{2}[2u_1 + (20 - 1)d] = \frac{20}{2}[2.1 + (20 - 1).3] = 590.$$

c. Ta có:

$$S_{20} = S' = u_5 + u_6 + \ldots + u_{22}$$

$$= \frac{20}{2}[2u_5 + (20 - 1)d] = \frac{20}{2}[2(1 + 4.3) + (20 - 1).3] = 830.$$

Ví dụ 2: Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm ba góc đó.

Giải

Xét ΔABC vuông tại A, có ba góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ lập thành một cấp số cộng.

Ta được:

$$\begin{cases} \hat{A} = 90^0 \\ \hat{B} + \hat{C} = 90^0 \\ \hat{A} + \hat{C} = 2\hat{B} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = 90^0 \\ \hat{B} + \hat{C} = 90^0 \\ 2\hat{B} - \hat{C} = 90^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = 90^0 \\ \hat{B} = 60^0 \\ \hat{C} = 30^0 \end{cases}.$$

Vậy, ta được $\hat{A} = 90^0$, $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 30^0$.

Ví dụ 3: Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 16 và tổng bình phương của chúng bằng 84.

Giải

Gọi $d = 2x$ là công sai, ta có bốn số là $a - 3x$, $a - x$, $a + x$, $a + 3x$.

Khi đó, từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases} (a - 3x) + (a - x) + (a + x) + (a + 3x) = 16 \\ (a - 3x)^2 + (a - x)^2 + (a + x)^2 + (a + 3x)^2 = 84 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 16 \\ 4a^2 + 20x^2 = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1, 3, 5, 7 \\ 7, 5, 3, 1 \end{array}\right.$$

Vậy, bốn số cần tìm là 1, 3, 5, 7.

Chú ý: **Nếu không biết biểu diễn bốn số dưới dạng đối xứng như trên thì sẽ phải giải một hệ bậc hai khá phức tạp, cụ thể:**

Gọi d là công sai của cấp số cộng x, y, z, t thoả mãn điều kiện đầu bài, ta có:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 14 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 94 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (x + d) + (x + 2d) + (x + 3d) = 14 \\ x^2 + (x + d)^2 + (x + 2d)^2 + (x + 3d)^2 = 94 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3d = 7 \\ 2x^2 + 6xd + 7d^2 = 47 \end{cases}.$$

Như vậy:

- Với ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, ta đặt:
  $a - x$, a, $a + x$, trong đó x là công sai.
- Với bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, ta đặt:
  $a - 3x$, $a - x$, $a + x$, $a + 3x$, trong đó x là công sai.
- Với năm số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, ta đặt:
  $a - 2x$, $a - x$, a, $a + x$, $a + 2x$, trong đó x là công sai.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho cấp số cộng (u_n) thoả mãn $u_2 - u_3 + u_5 = 10$ và $u_4 + u_6 = 26$. Tìm số hạng đầu tiên và công sai.

Bài tập 2. Cho cấp số cộng (u_n) thoả mãn $u_7 - u_3 = 8$ và $u_2.u_7 = 75$. Tìm số hạng đầu tiên và công sai.

Bài tập 3. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 20 và tổng bình phương của chúng bằng 120.

Bài tập 4. Tìm năm số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 25 và tổng bình phương của chúng bằng 165.

Bài toán 5: Tính tổng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thông thường bài toán được chuyển về tính tổng của một cấp số cộng.

Ví dụ 1: Tính tổng sau:

$$S = 105 + 110 + 115 + \ldots + 995.$$

Giải

Xét cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 105$ và công sai $d = 5$, ta được:

$$995 = u_n = u_1 + (n-1)d = 105 + 5(n-1) \Leftrightarrow n = 179$$

$$S = S_{179} = \frac{179}{2}(u_1 + u_{179}) = \frac{179}{2}(105 + 995) = 98450.$$

Ví dụ 2: Tính tổng sau:

$$S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ldots + 2^2 - 1^2.$$

Giải

Viết lại tổng S dưới dạng:

$$S = 199 + 195 + \ldots + 3.$$

Xét cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 199$ và công sai $d = -4$, ta được:

$$3 = u_n = u_1 + (n-1)d = 199 - 4(n-1) \Leftrightarrow n = 50$$

$$S = S_{50} = \frac{50}{2}(u_1 + u_{50}) = \frac{50}{2}(199 + 3) = 5050.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính các tổng sau:

a. $S = 55 + 60 + 65 + \ldots + 855.$

b. $S = 999 + 996 + 993 + \ldots + 3.$

Bài tập 2. Tính tổng sau:

$$S = 200^2 - 199^2 + 198^2 - 197^2 + \ldots + 2^2 - 1^2.$$

CHỦ ĐỀ 3

CẤP SỐ NHÂN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = u \\ u_{n+1} = u_n.q, \forall n \in N^* \end{cases}$$

(u, q là hai số thực khác 0 cho trước) được gọi là cấp số nhân.

- u là số hạng đầu tiên.
- q là công bội.

Đặc biệt khi q = 1 thì (u_n) là dãy số trong đó tất cả các số hạng đều bằng nhau.

2. CÁC TÍNH CHẤT

- Số hạng thứ n được cho bởi công thức:
  $u_n = u_1.q^{n-1}$.
- u_n, u_{n+1}, u_{n+2} là ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân (u_n) nếu:
  $u_{n+1}^2 = u_n.u_{n+2}$.
- Tổng của n số hạng đầu tiên S_n được cho bởi công thức:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1.\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

$$S = u_1 + u_2 + \ldots = \frac{u_1}{1 - q}, \text{ với } |q| < 1.$$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Chứng minh tính chất của một cấp số nhân.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Câu hỏi thường được đặt ra là:

" *Cho ba số a, b, c lập thành cấp số nhân, chứng minh tính chất K* "

khi đó, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Từ giả thiết a, b, c lập thành một cấp số nhân, ta được:

$a.c = b^2$.

Bước 2: Chứng minh tính chất K.

Ví dụ 1: Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng:

$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$.

Giải

Từ giả thiết a, b, c lập thành một cấp số nhân, ta được:

$a.c = b^2$.

Khi đó:

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2) = a^2b^2 + a^2c^2 + b^4 + b^2c^2 = a^2b^2 + acb^2 + acb^2 + b^2c^2$$

$$= a^2b^2 + 2ab^2c + b^2c^2 = (ab+bc)^2\text{, đpcm.}$$

Ví dụ 2: Cho (a_n) là một cấp số nhân. Chứng minh rằng:

$$a_1.a_n = a_k.a_{n-k+1}\text{, với } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Giải

Ta có ngay:

$$VT = a_1.a_n = a_1.a_1.q^{n-1} = a_1^2.q^{n-1}$$

$$VP = a_k.a_{n-k+1} = a_1.q^{k-1}.a_1.q^{n-k} = a_1^2.q^{n-1}$$

suy ra VT = VP, đpcm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng:

a. $(ab+bc+ca)^3 = abc(a+b+c)^3$.

b. $(a+b+c)(a-b+c) = a^2+b^2+c^2$.

c. $\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}\right)a^2b^2c^2 = a^3+b^3+c^3$.

Bài tập 2. Cho cấp số nhân (a_n). Có thể (a_n) cũng lập thành một cấp số cộng hay không ?

Bài tập 3. Cho (a_n) là một cấp số nhân. Hỏi các dãy số sau có phải là cấp số nhân không ?

a. $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2n-1}, \ldots$

b. $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2n}, \ldots$

Bài tập 4. Cho (a_n) là một cấp số nhân. Hỏi các dãy số sau có phải là cấp số nhân không ?

a. $(a_n + p)$, với p là số thực tuỳ ý.

b. $(p.a_n)$, với p là số thực khác 0.

c. $\left(\dfrac{p}{a_n}\right)$, với p là số thực khác 0.

d. (a_n^k), với $k \in \mathbb{Z}^+$.

Bài toán 2: Chứng minh ba số lập thành một cấp số nhân.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh ba số a, b, c lập thành cấp số nhân, ta đi chứng minh:

$$ac = b^2.$$

Ví dụ 1: Cho ba số $\frac{2}{b-a}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b-c}$ lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân.

Giải

Từ giả thiết ba số $\frac{2}{b-a}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b-c}$ lập thành một cấp số cộng, ta được:

$$\frac{2}{b-a} + \frac{2}{b-c} = \frac{2}{b} \Leftrightarrow b(b-c+b-a) = (b-a)(b-c) \Leftrightarrow b^2 = ac.$$

Vậy, ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ba số dương a, b, c lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng ba số $\sqrt[3]{abc}$, $\sqrt{ab+bc+ca}$, $a+b+c$ lập thành một cấp số nhân.

Bài tập 2. Cho ba số a, b, c thoả mãn $(a^2+b^2)(b^2+c^2) = (ab+bc)^2$. Chứng minh rằng a, b, c lập thành một cấp số nhân.

Bài toán 3: Tìm điều kiện của tham số để ba số lập thành một cấp số nhân.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để ba số a, b, c lập thành cấp số nhân, điều kiện là:

$ac = b^2$, bài toán được chuyển về việc giải phương trình.

Ví dụ 1: Tìm x để ba số x − 2, x − 4, x + 2 lập thành một cấp số nhân.

Giải

Ba số x − 2, x − 4, x + 2 lập thành một cấp số nhân, điều kiện là:

$$(x-4)^2 = (x-2)(x+2) \Leftrightarrow 8x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Vậy, với $x = \frac{5}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Một bài toán rất quen thuộc đối với phương trình bậc ba là:

"*Tìm điều kiện của tham số sao cho phương trình:*

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \text{ với } a \neq 0 \qquad (1)$$

có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số nhân"

Ta thực hiện như sau:

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân, khi đó:

$$x_1x_3 = x_2^2,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + x_2^2 = \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow x_2(x_1 + x_2 + x_3) = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{c}{b}.$$

Với $x_2 = -\frac{c}{b}$ thay vào (1) ta được:

$$a(-\frac{c}{b})^3 + b(-\frac{c}{b})^2 + c(-\frac{c}{b}) + d = 0 \Leftrightarrow ac^3 = b^3d. \quad (2)$$

Đó chính là điều kiện cần để (1) có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân.

Điều kiện đủ: Từ (2) suy ra phương trình có nghiệm $x_2 = -\frac{c}{b}$. Khi đó:

$$x_2(x_1 + x_2 + x_3) = (-\frac{c}{b})(-\frac{b}{a}) = \frac{c}{a} = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

$$\Leftrightarrow x_1x_3 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1, x_2, x_3 \text{ lập thành cấp số nhân.}$$

Vậy, điều kiện cần và đủ để (1) có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân là $ac^3 = b^3d$.

Với bài toán một tham số m, trong điều kiện đủ ta có thể khẳng định bằng việc chỉ ra nghiệm cụ thể của phương trình. Hãy nhớ điều này rất quan trọng bởi khi đó ta còn phải khẳng định phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 2: Xác định m để phương trình:

$$x^3 + 2x^2 + (m+1)x + 2(m+1) = 0 \quad (1)$$

có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân.

Giải

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân, khi đó:

$$x_1x_3 = x_2^2,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2,$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = m + 1 \Leftrightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + x_2^2 = m + 1$$

$$\Leftrightarrow x_2(x_1 + x_2 + x_3) = m + 1 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{m+1}{2}.$$

Với $x_2 = -\frac{m+1}{2}$ thay vào (1) ta được:

$$(-\frac{m+1}{2})^3 + 2(-\frac{m+1}{2})^2 + (m+1)(-\frac{m+1}{2}) + 2(m+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(m^2 + 2m - 15) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 3 \\ m = -4 \end{array}\right. .$$

Đó chính là điều kiện cần để (1) có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân.

Điều kiện đủ: Ta xét lần lượt:

- Với m = – 1, ta được:

  $$(1) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right. \text{ không thoả mãn.}$$

- Với m = 3, ta được:

  $$(1) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2+4) = 0$$

  $$\Leftrightarrow x = -2, \text{ không thoả mãn.}$$

- Với m = – 5, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, \text{ không thoả mãn.}$$

Vậy, không tồn tại m thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 3: Cho phương trình:

$$x^3 + ax + b = 0 \qquad (1)$$

Chứng minh rằng không tồn tại giá trị của a, b để phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân.

Giải

Ta đi chứng minh bằng phản chứng. Giả sử trái lại (1) có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số nhân, khi đó:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a \\ x_1x_2x_3 = b \\ x_2^2 = x_3x_1 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_2 = 0, \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy, không tồn tại giá trị của a, b để phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm x để ba số x, $x - 4$, $2x + 2$ lập thành một cấp số nhân.

Bài tập 2. Giả sử các số $5x - y$, $2x + 3y$, $x + 2y$ lập thành một cấp số cộng, còn các số $(y + 1)^2$, $xy + 1$, $(x - 1)^2$ lập thành một cấp số nhân. Tìm x và y.

Bài tập 3. Tính x theo a, b, c để ba số $x + a$, $x + b$, $x + c$ lập thành một cấp số nhân.

Bài tập 4. Xác định m để phương trình:

$$x^3 - 3mx^2 + 4mx + m - 2 = 0$$

có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân.

Bài toán 4: Tìm các phần tử của một cấp số nhân (u_n).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thông thường bài toán được chuyển về xác định u_1 và công bội q.

Ví dụ 1: Cho cấp số nhân (u_n) thoả mãn $u_4 - u_2 = 72$ và $u_5 - u_3 = 144$.

a. Tìm số hạng đầu tiên và công bội.

b. Tính tổng số của 10 số hạng đầu tiên.

c. Tính tổng $S' = u_3 + u_6 + \ldots + u_{12}$.

Giải

a. Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n), ta có:

$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^3 - u_1.q = 72 \\ u_1.q^4 - u_1.q^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.(q^3 - q) = 72 \\ u_1.(q^4 - q^2) = 144 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{q^3 - q}{q^4 - q^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = 12.$$

Vậy, cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 12$ và $q = 2$.

b. Ta có:

$$S_{10} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{10} = u_1.\frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 12.\frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 12276.$$

c. Ta có:

$$S' = u_3 + u_6 + \ldots + u_{12} = u_3.\frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 12.2^2.\frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 49104.$$

Ví dụ 2: **Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng::**

$$(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2.$$

***Áp dụng*: Tìm ba số liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng bằng 21 và tổng bình phương của chúng bằng 189.**

Giải

Từ giả thiết ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân, ta được:

$ac = b^2$.

Khi đó:

$$(a + b + c)(a - b + c) = (a + c)^2 - b^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2$$
$$= a^2 + 2b^2 + c^2 - b^2 = a^2 + b^2 + c^2, \text{đpcm}.$$

***Áp dụng*: Với ba số a, b, c thoả mãn điều kiện đầu bài ta được:**

$a + b + c = 21$ **và** $a^2 + b^2 + c^2 = 189$

Suy ra:

$$a - b + c = \frac{189}{21} = 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 6 \\ a + c = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 6 \\ a + c = 15 \\ a^2 + c^2 = 153 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 12 \end{cases}.$$

Vậy, ba số cần tìm là 3, 6, 12.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. **Cho cấp số nhân (u_n) thoả mãn $u_3 = 15$ và $u_5 = 135$.**

a. **Tìm số hạng đầu tiên và công bội.**

b. **Tính tổng số của 20 số hạng đầu tiên.**

Bài tập 2. **Cho cấp số nhân (u_n) thoả mãn $u_4 - u_2 = 12$ và $u_5 - u_3 = 24$.**

a. **Tìm số hạng đầu tiên và công bội.**

b. **Tính tổng số của 10 số hạng đầu tiên.**

c. **Tính tổng $S' = u_3 + u_6 + \ldots + u_{12}$.**

Bài tập 3. Cho cấp số nhân (u_n) thoả mãn $u_1 + u_6 = 244$ và $u_5 + u_4 = 36$.

a. Tìm số hạng đầu tiên và công bội.

b. Tính tổng số của 11 số hạng đầu tiên.

Bài tập 4. Cho cấp số nhân (u_n) thoả mãn $u_2 + u_4 = 10$ và $u_1 + u_3 + u_5 = -21$. Tìm số hạng đầu tiên và công bội.

Bài tập 5. Cho ba số khác nhau lập thành một cấp số cộng, bình phương của các số ấy lập thành một cấp số nhân. Tìm ba số đó.

Bài toán 5: Tính tổng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thông thường bài toán được chuyển về tính tổng của một cấp số nhân.

Ví dụ 1: Tính tổng sau:

$$S = 2 + 6 + 18 + \ldots + 13122.$$

Giải

Xét cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$, ta được:

$$13122 = u_n = u_1.q^{n-1} = 2.3^{n-1} \Leftrightarrow n = 9$$

$$S = S_9 = u_1.\frac{q^9 - 1}{q - 1} = 2.\frac{3^9 - 1}{3 - 1} = 19682.$$

Ví dụ 2: Tính tổng sau:

$$S = 1 + 2.2 + 3.2^2 + \ldots + 100.2^{99}. \qquad (1)$$

Giải

Ta có ngay:

$$2S = 1.2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + 100.2^{100}. \qquad (2)$$

Lấy (2) trừ (1), ta được:

$$S = 100.2^{100} - (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{99}) = 100.2^{100} - \frac{2^{100} - 1}{2 - 1} = 99.2^{100} + 1.$$

Ví dụ 3: Tính tổng sau:

$$S = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ chữ số}}.$$

Giải

Xét hai dãy số:

- Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1$ và công bội $q = 10$.
- Dãy số $(s_n) = \{1, 11, 111, \ldots, \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ chữ số}}\}$.

Suy ra s_n là tổng n số hạng đầu của cấp số nhân (u_n), tức là:

$$s_n = \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{1}{9}(10^n - 1).$$

Khi đó, ta nhận được:

$$S = s_1 + s_2 + \ldots + s_n = \sum_{k=1}^{n} s_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{9}(10^k - 1) = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n} 10^k - \frac{n}{9}$$

$$= \frac{1}{9}.10.\frac{10^n - 1}{10 - 1} - \frac{n}{9} = \frac{1}{81}(10^{n+1} - 10 - 9n).$$

Ví dụ 4: Tính tổng sau:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Giải

Xét cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2} < 1$, ta được:

$$S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Ví dụ 5: Cho:

$S = 1 + q + q^2 + \ldots$, với $|q| < 1$,
$T = 1 + Q + Q^2 + \ldots$, với $|Q| < 1$,
$A = 1 + qQ + q^2Q^2 + \ldots$

Tính A theo S và T.

Giải

Với giả thiết $|q| < 1$, $|Q| < 1$ suy ra $|qQ| < 1$.

Khi đó:

$$S = \frac{1}{1-q} \Rightarrow q = \frac{S-1}{S}, \qquad T = \frac{1}{1-Q} \Rightarrow Q = \frac{T-1}{T},$$

$$A = \frac{1}{1 - qQ} = \frac{1}{1 - \frac{S-1}{S}.\frac{T-1}{T}} = \frac{ST}{S + T - 1}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính các tổng sau:

a. $S = 1 + 4 + 16 + \ldots + 65536$.

b. $S = 3 - 15 + 75 - \ldots + 234375$.

Bài tập 2. Tính tổng sau:

a. $S = 1 + 4.2 + 7.2^2 + 10.2^3 + \ldots + 288.2^{99}$.

b. $S = 1 + 2.3 + 3.3^2 + \ldots + 100.3^{99}$.

Bài tập 3. Tính tổng sau:

$$S = 6 + 66 + 666 + \ldots + \underbrace{66\ldots6}_{n\text{ chữ số}}.$$

Bài tập 4. Tính tổng sau:

$$S = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(3^2 + \frac{1}{3^2}\right)^2 + \ldots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2.$$

ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG II

ĐỀ SỐ 1

(Thời gian 60 phút)

Câu I. (2 điểm): Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = 2u_{n-2} + u_{n-1},\ n \geq 3 \end{cases}.$$

Khẳng định rằng mọi số hạng của dãy số này đều là:

A. Số lẻ. **B.** Số chẵn. **C.** Cả chẵn và lẻ.

Câu II. (2 điểm): Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}$.

a. (1 điểm): Viết 6 số hạng đầu của dãy.

A. $3; \frac{5}{3}; \frac{7}{5}; \frac{9}{7}; \frac{11}{9}; \frac{13}{11}$. **C.** $-1; 6; \frac{5}{3}; \frac{7}{5}; \frac{9}{7}; \frac{11}{9}$.

B. $6; \frac{7}{5}; \frac{11}{9}; \frac{15}{13}; \frac{19}{17}; \frac{23}{21}$. **D.** $\frac{5}{3}; \frac{9}{7}; \frac{13}{11}; \frac{17}{15}; \frac{21}{19}$.

b. (1 điểm): Tìm xem $\dfrac{19}{17}$ là số hạng thứ mấy của dãy số ?

A. u_5. **B.** u_7. **C.** u_9. **D.** u_{11}.

Câu III. (3 điểm):

a. (1 điểm): Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

$$a^2 + 8bc = (2b + c)^2.$$

b. (1 điểm): Cho ba số a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng có công sai khác 0. Chứng minh rằng ba số $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{c+a}$, $\dfrac{1}{a+b}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

c. (1 điểm): Xác định m để các phương trình sau có các nghiệm lập thành một cấp số cộng:

$$x^3 - 3x^2 + mx + 2 - m = 0.$$

A. $m \leq 3$. **B.** $m \geq 3$. **C.** $m = 0$. **D.** m tuỳ ý.

Câu IV. (3 điểm):

a. (1 điểm): Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng:

$$(ab + bc + ca)^3 = abc(a + b + c)^3.$$

b. (1 điểm): Cho ba số dương a, b, c lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng ba số $\sqrt[3]{abc}$, $\sqrt{ab + bc + ca}$, $a + b + c$ lập thành một cấp số nhân.

c. (1 điểm): Giả sử các số $5x - y$, $2x + 3y$, $x + 2y$ lập thành một cấp số cộng, còn các số $(y + 1)^2$, $xy + 1$, $(x - 1)^2$ lập thành một cấp số nhân. Tìm x và y.

A. $(0; 0)$ và $(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{10})$. **C.** $(\frac{10}{3}; \frac{4}{3})$ và $(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{10})$.

B. $(\frac{10}{3}; \frac{4}{3})$ và $(0; 0)$. **D.** $(0; 0)$ và $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$.

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian 60 phút)

Câu I. (2 điểm): Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2}{n^2 + 4n + 3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và dãy số (S_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} S_1 = u_1 \\ S_n = S_{n-1} + u_n,\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính S_n theo n.

A. $S_n = \frac{2}{n^2 + 4n + 3}$. **C.** $S_n = \frac{1}{(n + 2)(n + 3)}$.

B. $S_n = \frac{1}{(n + 1)(n + 3)}$. **D.** $S_n = \frac{5n^2 + 13n}{(n + 2)(n + 3)}$.

Câu II. (2 điểm): Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1,\ n \geq 2 \end{cases}.$$

a. (1 điểm): Hãy viết 6 số hạng đầu của dãy số.

A. 1; 7; 31; 127; 511; 2047. **C.** 1; 2; 4; 8; 16; 32.

B. 1; 3; 15; 63; 127; 511. **D.** 1; 3; 7; 15; 31; 63.

b. (1 điểm): Tìm xem 511 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

A. u_5. **B.** u_6. **C.** u_{11}. **D.** u_9.

Câu III. (3 điểm):

a. (1 điểm): Cho (a_n) là một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

$$(q - r)a_p + (r - p)a_q + (p - q)a_r = 0.$$

b. (1 điểm): Cho ba số dương a, b, c lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

c. (1 điểm): Cho cấp số cộng (u_n) thoả mãn $u_2 - u_3 + u_5 = 10$ và $u_4 + u_6 = 26$. Tìm số hạng đầu tiên và công sai.

A. $u_1 = 1$ và $d = 3$. **C.** $u_1 = -1$ và $d = -3$.

B. $u_1 = -1$ và $d = 3$. **D.** $u_1 = 1$ và $d = -3$.

Câu IV. (3 điểm):

a. (1 điểm): Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2.$$

b. (1 điểm): Cho ba số a, b, c thoả mãn $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$. Chứng minh rằng a, b, c lập thành một cấp số nhân.

c. (1 điểm): Cho cấp số nhân (u_n) thoả mãn $u_2 + u_4 = 10$ và $u_1 + u_3 + u_5 = -21$. Tìm số hạng đầu tiên và công bội.

A. $u_1 = -16$ và $q = -2$ hoặc $u_1 = -1$ và $q = -\frac{1}{2}$.

B. $u_1 = -16$ và $q = -\frac{1}{2}$ hoặc $u_1 = -1$ và $q = -2$.

C. $u_1 = 16$ và $q = -\frac{1}{2}$ hoặc $u_1 = 1$ và $q = -2$.

D. $u_1 = 16$ và $q = -2$ hoặc $u_1 = 1$ và $q = -\frac{1}{2}$.

CHƯƠNG III

GIỚI HẠN

CHỦ ĐỀ 1

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa: *Số u được gọi là giới hạn của dãy số* (u_n) *nếu với mọi số* ε *dương tuỳ ý, tồn tại số tự nhiên* N *sao cho với mọi* $n > N$ *thì* $|u_n - u| < \varepsilon$.

Như vậy:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*: |u_n - u| < \varepsilon \text{ với } n > N.$$

2. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Định lí 1: (*Điều kiện cần để dãy số có giới hạn*): *Nếu một dãy số có giới hạn thì nó bị chặn.*

Định lí 2: (*Định lí Vaiơstrat – Điều kiện đủ để dãy số có giới hạn*):

- *Một dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn.*
- *Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn.*

Định lí 3: (*Tính duy nhất của giới hạn*): *Nếu một dãy số có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.*

Định lí 4: (*Các phép toán trên các giới hạn của dãy số*): *Nếu hai dãy số* (a_n) *và* (b_n) *có giới hạn thì ta có:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \text{ với } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0.$$

Định lí 5: *Nếu hai dãy số* (a_n) *và* (b_n) *có giới hạn và* $a_n \le b_n$ *với mọi n thì*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n .$$

Định lí 6: (*Nguyên lí kẹp giữa*): *Cho ba dãy số* (a_n), (b_n) *và* (c_n) *sao cho* $a_n \le b_n \le c_n$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

3. CÁC GIỚI HẠN CƠ BẢN

Ta có:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$, với C là hằng số.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 0$, với $\alpha > 0$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, với $|q| < 1$.

4. DÃY SỐ DẦN TỚI VÔ CỰC

***Định nghĩa**: Dãy số (u_n) gọi là dần tới $+\infty$ nếu với mọi số dương M tuỳ ý, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi $n > N$ thì $u_n > M$.*

Như vậy:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*: u_n > M \text{ với } n > N.$$

Tương tự, ta có định nghĩa:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*: u_n < -M \text{ với } n > N.$$

Ta có các kết quả sau:

1. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.

2. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = \infty$.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với $\forall\varepsilon > 0$, xuất phát từ bất đẳng thức:

$$|u_n - u| < \varepsilon \Rightarrow n > g(\varepsilon).$$

Bước 2: Chọn $N = [g(\varepsilon)] + 1$.

Bước 3: Vậy:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*: |u_n - u| < \varepsilon \text{ với } n > N \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = u.$$

Ví dụ 1: Dùng định nghĩa giới hạn, chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1$. b. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$. c. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{n^2+2n+2} = 1$.

Giải

a. Với $\forall\varepsilon > 0$, ta xét:

$$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2}{n+2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 2.$$

Chọn $N = \left[\frac{2}{\varepsilon} - 2\right] + 1$, ta được:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*: \left|\frac{n}{n+2} - 1\right| < \varepsilon \text{ với } n > N \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1.$$

b. Với $\forall\varepsilon > 0$, ta xét:

$$\left|\frac{n}{n^2+1} - 0\right| = \frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Chọn $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, ta được:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*: \left|\frac{n}{n^2+1}\right| < \varepsilon \text{ với } n > N \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0.$$

c. Với $\forall\varepsilon > 0$, ta xét:

$$\left|\frac{n^2+2n}{n^2+2n+2} - 1\right| = \frac{2}{n^2+2n+2} < \frac{2}{n^2+2n+1} = \frac{2}{(n+1)^2} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} - 1.$$

Chọn $N = \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} - 1\right] + 1$, ta được:

$$\forall\varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}^*: \left|\frac{n^2+2n}{n^2+2n+2} - 1\right| < \varepsilon \text{ với } n>N \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{n^2+2n+2} = 1.$$

Ví dụ 2: **Dùng định nghĩa giới hạn, chứng minh rằng:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0.$$

Giải

Với $\forall\varepsilon > 0$, ta xét:

$$\left|(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 0\right| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon^2}.$$

Chọn $N = \left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right] + 1$, ta được:

$$\forall\varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}^*: \left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| < \varepsilon \text{ với } n>N \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Dùng định nghĩa giới hạn, chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1.$ b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+5}{3n+1} = \dfrac{2}{3}.$

Bài tập 2. Dùng định nghĩa giới hạn, chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0.$ b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+4n}{n^2+4n+5} = 1.$

Bài tập 3. Dùng định nghĩa giới hạn, chứng minh rằng:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) = 0.$$

Bài tập 4. Dùng định nghĩa giới hạn, chứng minh rằng:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \frac{1}{2}.$$

Bài toán 2: Chứng minh một dãy số có giới hạn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng định lí Vaiơstrat, cụ thể:

- Một dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn.
- Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn.

Ví dụ 1: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$. Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn.

Giải

Ta sẽ đi chứng minh dãy số (u_n) tăng và bị chặn trên.

- Chứng minh dãy số (u_n) tăng. Xét hiệu:

$$H = u_{n+1} - u_n$$

$$= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0.$$

Vậy, dãy (u_n) tăng.

- Chứng minh dãy số (u_n) bị chặn trên. Ta có:

$$u_n < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Vậy, dãy (u_n) bị chặn trên bởi 1.

Vậy, dãy (u_n) có giới hạn.

Ví dụ 2: * Cho dãy số (u_n) với $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn.

Giải

Ta sẽ đi chứng minh dãy số (u_n) giảm và bị chặn dưới.

- Chứng minh dãy số (u_n) giảm. Thật vậy, dễ thấy $u_n > 0$ với $\forall n \in N^*$, xét tỉ số:

$$P = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+2}{n+1}.\frac{n}{n+1}\right)^n.\frac{n+2}{n+1}$$

$$= \left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n.\left(1+\frac{1}{n+1}\right).$$

Theo bất đẳng thức Bernoulli $(1 + a)^n > 1 + na$, do đó:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right) < \left[1+\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n$$

suy ra:

$$P < \left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n.\left[1+\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n = \left[1-\frac{1}{(n+1)^4}\right]^n < 1.$$

Vậy, dãy (u_n) giảm.

- Chứng minh dãy số (u_n) bị chặn dưới. Ta có $u_n > 1$, tức là nó bị chặn dưới.

Vậy, dãy (u_n) có giới hạn.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$. Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn.

Bài tập 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn.

Bài tập 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = \sqrt{2+u_{n-1}},\ n \ge 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn.

Bài toán 3: Tính giới hạn của dãy số bằng các định lí về giới hạn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Đưa dãy số cần tìm giới hạn về dạng tổng hiệu, tích, thương của những dãy số mà ta đã biết giới hạn.

Ta có các kết quả sau:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$, với C là hằng số.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, với $\alpha > 0$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, với $|q| < 1$.
4. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.
5. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = \infty$.

Cách 2: Sử dụng nguyên lí kẹp giữa.

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2}$. b. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+2}$. c. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{n+1}$.

Giải

a. Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n}} = \frac{2}{1} = 2.$$

b. Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

c. Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Ví dụ 2: Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n+3}$. b. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\sqrt[3]{n^3+1}+n\sqrt{n}}{n\sqrt{n^2+1}+3}$.

Giải

a. Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}=\frac{1}{2}.$$

b. Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\sqrt[3]{n^3+1}+n\sqrt{n}}{n\sqrt{n^2+1}+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^6}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{3}{n^2}}=1.$$

Ví dụ 3: Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$. b. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sqrt[3]{1-n^3}}{\sqrt{n^2+1}-n}$.

Giải

a. Ta thực hiện phép nhân liên hợp:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

b. Ta thực hiện phép nhân liên hợp:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt[3]{1-n^3}}{\sqrt{n^2+1}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3+1-n^3)(\sqrt{n^2+1}+n)}{(n^2+1-n^2)\left[n^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+\sqrt[3]{(1-n^3)^2}\right]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+\sqrt[3]{(1-n^3)^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}+\frac{1}{n}}{1-\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}-1}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n^3}-1\right)^2}}=\frac{0}{1+1+1}=0.$$

Ví dụ 4: Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-4^n}{1+4^n}$. b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n-4^{n+1}}{3^{n+2}+4^n}$.

Giải

a. Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-4^n}{1+4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{4^n}-1}{\dfrac{1}{4^n}+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n-1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n+1} = -1$$

b. Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n-4^{n+1}}{3^{n+2}+4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3^n}{4^n}-4}{3.\dfrac{3^n}{4^n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-4}{3\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-4}{\lim\limits_{n\to\infty} 3.\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+1} = -4.$$

Ví dụ 5: Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$, với $|a|, |b| < 1$.

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Giải

Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+a+a^2+\ldots+a^n)(1-a)(1-b)}{(1+b+b^2+\ldots+b^n)(1-b)(1-a)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}} = \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty} a^{n+1}}{1-\lim\limits_{n\to\infty} b^{n+1}} = 1.$$

Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1.3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}\ldots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}.\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 6. Tính giới hạn sau:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}.$$

Giải

Ta biến đổi:

$$u_n=\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}\Leftrightarrow u_n^2=\frac{1.3}{2^2}.\frac{3.5}{4^2}.\frac{5.7}{6^2}\cdots\frac{(2n-1).(2n+1)}{(2n)^2}.\frac{1}{2n+1}$$

$$\Rightarrow u_n^2<\frac{1}{2n+1}\Rightarrow 0<u_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Nhận xét rằng:

$$\lim_{n\to\infty}0=0 \text{ và } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$$

suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0.$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+2}.$

c. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+1}{n^2+6}.$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n+1}{3n^3+2n^2+6}.$

d. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n-1}.$

Bài tập 2. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{2n+\sqrt{n+1}}.$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{n^3+1}+n\sqrt{n}}{2n\sqrt{n^2+1}+1}.$

Bài tập 3. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2+1}).$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt{n^2+1}-n}.$

Bài tập 4. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2^n}{1+2^n}.$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n-1}-4^{n+1}}{3^{n+2}+4^{n+2}}.$

Bài tập 5. Tính giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+...+\dfrac{1}{n.(n+1)}\right].$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{5}{n^2}+...+\dfrac{2n-1}{n^2}\right).$

Bài tập 6. Tính giới hạn sau:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right).$$

CHỦ ĐỀ 2

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

***Định nghĩa 1**: Cho hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên một khoảng* K, *có thể trừ ở một điểm* $x_0 \in K$.

Số l *được gọi là giới hạn của hàm số* $f(x)$ *khi* x *tiến tới* x_0 *khi với mọi số dương* ε *tuỳ ý tồn tại một số dương* δ *sao cho* $|x - x_0| < \delta$ *thì* $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Như vậy:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \left|x - x_0\right| < \delta \text{ ta có } \left|f(x) - l\right| < \varepsilon.$$

***Định nghĩa 2**: (Định nghĩa giới hạn của hàm số bằng giới hạn của dãy số)* :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \text{Với mọi dãy } \{x_n\} \to x_0 \text{ ta có } f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} l.$$

2. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

***Định lí 1**: (Tính duy nhất của giới hạn): Nếu một hàm số có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.*

***Định lí 2**: (Các phép toán trên các giới hạn của hàm số): Nếu hai hàm số f(x) và g(x) có giới hạn khi* $x \to x_0$ *thì ta có:*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x). \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \text{ với } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0.$$

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to x_0} f(x)}, \text{ với } f(x) \geq 0.$$

***Định lí 3**: (Nguyên lí kẹp giữa): Cho ba hàm số f(x), g(x) và h(x) sao cho* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *và* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$.

3. GIỚI HẠN CƠ BẢN

Ta có:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$, với C là hằng số.
2. Nếu hàm số f(x) xác định tại điểm x_0 thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

4. GIỚI HẠN MỘT PHÍA

***Định nghĩa 3**: Ta có:*

a. ***Giới hạn trái**:*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : -\delta < x - x_0 < 0 \text{ thì } |f(x) - a| < \varepsilon.$$

b. ***Giới hạn phải:***

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < x - x_0 < \delta \text{ thì } |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Định lí 4: **Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ là $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$.**

5. GIỚI HẠN Ở VÔ CỰC

***Định nghĩa 4**: Ta có:*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : |x| > A \text{ ta có } |f(x) - a| < \varepsilon.$$

***Định nghĩa 5**: Ta có:*

a. ***Giới hạn trái ở vô cực**:*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M < 0 : x < M \text{ ta có } |f(x) - a| < \varepsilon.$$

b. ***Giới hạn phải ở vô cực**:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 : x > M \text{ ta có } |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Định lí 5: **Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$ là $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$.**

Định lí 6: **(*Nguyên lí kẹp giữa*)**: *Cho ba hàm số $f(x)$, $g(x)$ và $h(x)$ sao cho $f(x) \le g(x) \le h(x)$ và* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L$.

6. GIỚI HẠN VÔ CỰC

***Định nghĩa 6**: Ta có:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall c > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \text{ ta có } |f(x)| > c.$$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: **Với $\forall \varepsilon > 0$, xuất phát từ bất đẳng thức:**

$$|f(x) - a| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < g(\varepsilon).$$

Bước 2: **Đặt $\delta = g(\varepsilon)$.**

Bước 3: **Vậy:**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = g(\varepsilon) > 0 : |x - x_0| < \delta \text{ ta có } |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = 2x + 1$. Chứng minh rằng $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$.

Giải

Với $\forall \varepsilon > 0$ xét bất đẳng thức:

$$|f(x) - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x + 1 - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Đặt $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Vậy $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0 : |x - 1| < \delta$ ta có:

$$|f(x) - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 3, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với mọi $x_0 > 0$, ta luôn có $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

Giải

Ta có:

$$\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}.$$

Như vậy, với số $\varepsilon > 0$, để có $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$, ta chọn x sao cho:

$$\frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon \Leftrightarrow |x - x_0| < \varepsilon\sqrt{x_0}.$$

Vậy $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon\sqrt{x_0} : |x - x_0| < \delta$, ta có :

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

a. $\lim_{x \to 1} (3x - 1) = 2$.

b. $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 4) = 4$.

Bài tập 2. Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

a. $\lim_{x \to 1} \frac{2x + 1}{x + 2} = 1$.

b. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x + 8}{x + 1} = 8$.

Bài tập 3. Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

a. $\lim_{x \to x_0} kx = kx_0$.

b. $\lim_{x \to x_0} (ax + b) = ax_0 + b$.

c. $\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$.

d. $\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.

Bài tập 4. Chứng minh rằng nếu $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ thì $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |a|$.

Bài toán 2: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với $\forall\varepsilon > 0$, xuất phát từ bất đẳng thức:

$$|f(x) - a| < \varepsilon \Rightarrow |x| > g(\varepsilon).$$

Bước 2: Đặt $A = g(\varepsilon)$.

Bước 3: Vậy:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists A = g(\varepsilon) > 0\text{: } |x| > A \text{ ta có } |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = a.$$

Ví dụ 1: Cho $f(x) = \frac{1}{x}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Giải

Với $\forall\varepsilon > 0$ xét bất đẳng thức:

$$|f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Đặt $A = \frac{1}{\varepsilon}$.

Vậy $\forall\varepsilon > 0, \exists A = \frac{1}{\varepsilon} > 0 : |x| > A$ ta có :

$$|f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{đpcm.}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x-1} = 2.$

Bài tập 2. Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0.$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x-1}{x^2+1} = 3.$

Bài toán 3: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với $\forall\varepsilon > 0$, xuất phát từ bất đẳng thức:

$$|f(x)| > c \Rightarrow |x - x_0| < g(c).$$

Bước 2: Đặt $\delta = g(\varepsilon)$.

Bước 3: Vậy:

$$\forall c > 0, \exists\delta > 0 : |x - x_0| < \delta \text{ ta có } |f(x)| > c \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \text{đpcm.}$$

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$.

Giải

Với mọi c>0 tuỳ ý, xét :

$$|f(x)| > c \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x-1}\right| > c \Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{c}.$$

Đặt $\delta = \frac{1}{c}$.

Vậy $\forall c > 0, \exists \delta = \frac{1}{c} > 0 : |x - 1| < \delta$ ta có:

$$|f(x)| > c \Leftrightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = \infty, \text{ đpcm}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

b. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x}{x-2} = \infty$.

Bài tập 2. Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{1}{\sqrt{x-3}} = +\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$.

Bài toán 4: Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ không tồn tại.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với

- $x_n \to x_0$ khi $n \to \infty$, khi đó đánh giá $f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} L_1$.
- $y_n \to x_0$ khi $n \to \infty$, khi đó đánh giá $f(y_n) \xrightarrow{n \to \infty} L_2$.

Bước 2: Nhận xét rằng $L_1 \neq L_2$.

Bước 3: Vậy, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ không tồn tại.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to \infty} \cos x$ không tồn tại.

Giải

Đặt $f(x) = \cos x$.

Chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với :

- $x_n = 2n\pi \Rightarrow x_n \to \infty$ khi $n \to \infty$ và ta được :

$$f(x_n) = \cos(x_n) = \cos(2n\pi) \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

- $y_n = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow y_n \to \infty$ khi $n \to \infty$ và ta được :

$$f(y_n) = \cos(y_n) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Vậy, $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$ không tồn tại.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ không tồn tại.

Bài tập 2. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ không tồn tại.

Bài tập 3. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to\infty} \sin 2x$ không tồn tại.

Bài tập 4. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 1} \sin\dfrac{1}{x-1}$ không tồn tại.

Bài toán 5: Giới hạn của hàm số kép.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ khi } x < x_0 \\ f_2(x) \text{ khi } x \geq x_0 \end{cases}.$$

Để tính giới hạn hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số có giới hạn khi $x \to x_0$ ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Tính giới hạn các giới hạn:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f_1(x) = L_1.$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f_2(x) = L_2.$$

Bước 2: Khi đó :

- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L.$
- Để hàm số có giới hạn khi $x \to x_0$ điều kiện là :

  $L_1 = L_2 \Rightarrow$ Giá trị của *tham số*.

Ví dụ 1: Cho hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 \text{ khi } x < 0 \\ x^2+1 \text{ khi } x \geq 0 \end{cases}.$$

Tính các giới hạn $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ và $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

Giải

Ta có :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x+1) = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2+1) = 1.$$

Vậy :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

Ví dụ 2: Cho hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} x+a \text{ khi } x < 0 \\ x^2+1 \text{ khi } x \geq 0 \end{cases}.$$

Tìm a để hàm số có giới hạn khi x → 0.

Giải

Ta có :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x+a) = a \text{ và } \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2+1) = 1.$$

Hàm số có giới hạn khi $x \to 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy với $a = 1$ ta có $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ khi } x < 0 \\ x^2 \quad \text{ khi } x \geq 0 \end{cases}.$$

Tính các giới hạn $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ và $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

Bài tập 2. Cho hàm số :

$$f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

Tính giới hạn $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ và $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

Bài tập 3. Cho hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} x + 3a \text{ khi } x < 0 \\ x^2 + a + 2 \text{ khi } x \geq 0 \end{cases}.$$

Tìm a để hàm số có giới hạn khi x→ 0.

Bài tập 4. Cho hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} x + 3a & \text{khi } x < -1 \\ x^2 + x + a + 3 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}.$$

Tìm a để hàm số có giới hạn khi x→ −1.

Bài toán 6: Sử dụng nguyên lí kẹp giữa tìm giới hạn của hàm số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Giả sử cần tính giới hạn của hàm số $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (hoặc $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$), ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn hai hàm số g(x), h(x) thoả mãn:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

Bước 2: Khẳng định:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L \text{ (hoặc } \lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} h(x) = L.).$$

Bước 3: Kết luận:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L \text{ (hoặc } \lim_{x \to \infty} f(x) = L).$$

Ví dụ 1: Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x}$.

Giải

Với mọi x ≠ 0 thuộc lân cận của điểm 0 luôn có:

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x\sin\frac{1}{x} \leq |x|,$$

$$\lim_{x \to 0}(-|x|) = \lim_{x \to 0}|x| = 0.$$

Vậy, ta được :

$$\lim_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Ví dụ 2: (HVCNBCVT - 99): Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$.

Giải

Với mọi x ≠ 0 thuộc lân cận của điểm 0 luôn có:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|}, \text{ với } \forall x \neq 0$$

$$\lim_{x \to \infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x \to \infty}\frac{1}{|x|} = 0.$$

Vậy, ta được :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

và khi đó :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính các giới hạn:

a. $\lim\limits_{x\to0}x\cos\frac{1}{x}$. b. $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}$.

Bài tập 2. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\cos x}{x+\cos x}$.

Bài toán 7: Dùng các định lí về giới hạn và giới hạn cơ bản để tìm giới hạn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng kết quả của định lí 2 và các giới hạn cơ bản sau:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$, với C là hằng số.
2. Nếu hàm số f(x) xác định tại điểm x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$, với $n>0$.

Ví dụ 1: Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to3}(x^2+3x+4).$$

Giải

Ta có :

$$\lim_{x\to3}(x^2+3x+4)=3^2+3.3+4=22.$$

Ví dụ 2: Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}.$$

Giải

Ta có :

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2.$$

Ví dụ 3: Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2+2x-3}.$$

Giải

Ta có :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(\sqrt{x+8}+3)(x-1)(x+3)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{x+8}+3)(x+3)}=\frac{1}{24}.$$

Ví dụ 4: Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x-1}.$$

Giải

Chia cả tử và mẫu cho x^2, ta được :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=1.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim_{x\to 1}(2x+4)$.

b. $\lim_{x\to 3}(x^2+4x+3)$.

c. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+1}{x-1}$.

Bài tập 2. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$.

b. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$.

c. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-9}$.

d. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+6x+5}{x^3+2x^2-1}$

Bài tập 3. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-3x+2}$.

b. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x}-2}$.

Bài tập 4. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}$.

b. $\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x^2-1}$.

CHỦ ĐỀ 3

CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Khi tìm giới hạn của một hàm số, chúng ta có thể gặp các trường hợp sau:

1. $\lim \dfrac{u(x)}{v(x)}$ với $u(x) \to 0$ và $v(x) \to 0$.
2. $\lim \dfrac{u(x)}{v(x)}$ với $u(x) \to \infty$ và $v(x) \to \infty$.
3. $\lim[u(x) - v(x)]$ với $u(x) \to \infty$ và $v(x) \to \infty$.
4. $\lim[u(x).v(x)]$ với $u(x) \to 0$ và $v(x) \to \infty$.

Ta gọi là các dạng vô định dạng $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$, …

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH

Bài toán 1. Tính giới hạn dạng $\dfrac{0}{0}$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Bản chất của việc khử dạng không xác định $\dfrac{0}{0}$ là làm xuất hiện nhân tử chung để :

- Hoặc là khử nhân tử chung để đưa về dạng xác định.
- Hoặc đưa giới hạn về dạng giới hạn cơ bản, quen thuộc đã biết rõ kết quả hoặc cách giải.

Ghi chú:

- Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm x_0 thì $f(x) = (x - x_0).g(x)$.
- Liên hợp của biểu thức:

$\sqrt{a} - b$ là $\sqrt{a} + b$.

$\sqrt{a} - \sqrt{b}$ là $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

$\sqrt[3]{a} - b$ là $\sqrt[3]{a^2} + b\sqrt[3]{a} + b^2$.

$\sqrt[3]{a} + b$ là $\sqrt[3]{a^2} - b\sqrt[3]{a} + b^2$.

Ví dụ 1: Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x-1}.$$

Giải

Phân tích để khử dạng $\frac{0}{0}$. Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(3x-1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(3x-1)=2.$$

Ví dụ 2: Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin 2x-\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{1-\sin 2x-\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}=\frac{(1-\cos 2x)-\sin 2x}{(1-\cos 2x)+\sin 2x}=\frac{2\sin^2 x-2\sin x.\cos x}{2\sin^2 x+2\sin x.\cos x}$$

$$=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}.$$

Do đó :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin 2x-\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}=-1.$$

Ví dụ 3: Tính các giới hạn:

a. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{3-\sqrt{2x+9}}$. b. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}$.

Giải

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{3-\sqrt{2x+9}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(3+\sqrt{2x+9})}{-2x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3+\sqrt{2x+9}}{-2(\sqrt{x+1}+1)}=-\frac{3}{2}.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x})(2-x)}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x})(2x-4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}}{-2(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x})}=-\frac{1}{4}.$$

Ví dụ 4: Tính giới hạn:

a. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, với $a > 0$. b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} + x^3 - 3x}$.

Giải

a. Ta có :

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{x - a}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})\sqrt{x^2 - a^2}} + \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x + a}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x - a}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})\sqrt{x + a}} + \frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

b. Ta có :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} + x^3 - 3x} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\dfrac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1} + \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x - 1}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\dfrac{x^2 - 1}{(\sqrt{x^2 + 3} + 2)(x - 1)} + x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 3} + 2} + x - 2} = -2.$$

Ví dụ 5: Tính giới hạn:

a. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x - 2}$. b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x - 1} + \sqrt[3]{x + 1}}{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 1}}$.

Giải

a. Ta có:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{4x - 8}{[(\sqrt[3]{4x})^2 + \sqrt[3]{4x} + 4](x - 2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{4}{(\sqrt[3]{4x})^2 + 2\sqrt[3]{4x} + 4} = \frac{1}{3}.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{2x(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1})}{x[\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}+\sqrt[3]{(x+1)^2}]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1})}{\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}=\frac{4}{3}.$$

Ví dụ 6: Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1}{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1}.$$

Giải

Ta có :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1}{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1}{x-1}}{\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1}{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}+\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}}{\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+1}{x-1}+\dfrac{x^2-x}{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{2x-2}{(\sqrt{2x-1}+1)(x-1)}+x-2}{\dfrac{x-1}{[\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1](x-1)}+x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+x-2}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1}+x}=0.$$

Ví dụ 7: Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{5x+1}-1}{x}.$$

Giải

Đặt $t=\sqrt[5]{5x+1}$, ta được :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{5x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{t-1}{\dfrac{t^5-1}{5}}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{t^4+t^3+t^2+t+1}=1.$$

Ví dụ 8: Tính giới hạn :

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}.$$

Giải

Ta có :

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-2+2-\sqrt[3]{8-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2(\sqrt{1+x}-1)}{x}+\frac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+1)}+\frac{x}{x[4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}]}\right\}=\frac{13}{12}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính các giới hạn sau :

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3x+1}{-x^2+4x+5}$.

b. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x^2-2x-8}{x^2-3x+2}$.

Bài tập 2. Tính các giới hạn sau :

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$.

b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-nx+(n-1)}{(x-1)^2}$.

Bài tập 3. Tính các giới hạn sau :

a. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$.

b. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$.

Bài tập 4. Tính các giới hạn sau :

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{3-\sqrt{2x+9}}$.

b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}{x-1}$.

c. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-\sqrt{3x-2}}{x-1}$.

d. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}$.

Bài tập 5. Tính các giới hạn sau :

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

b. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}+x^4-3x^3+x^2+3}{\sqrt{2x}-2}$.

Bài tập 6. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x-2}+1}$.

b. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+x^2+x+1}{x+1}$.

Bài tập 7. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1}$.

b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{4x-3}-1}{x-1}$.

c. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt[5]{x-2}}{x-1}$.

d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$.

Bài tập 8. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+2004)\sqrt[7]{1-2x}-2004}{x}$.

b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+x}.\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{2}}.\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{3}}-\sqrt[4]{1-x}}{\dfrac{3}{2}\sqrt{4+x}-\sqrt[3]{8-x}-\sqrt[4]{1+x}}$.

Bài toán 2. Tính giới hạn dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa bậc cao nhất của x có mặt ở phân thức đó.

Ví dụ 1: Tính các giới hạn:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)^2(3+x)^2}{(2-x)(3-x)^2(4-x)^2}.$$

Giải

Chia cả tử và mẫu cho x^6, ta được :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)^2(3+x)^2}{(2-x)(3-x)^2(4-x)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\left(\dfrac{1}{x}+1\right)^2\left(\dfrac{3}{x}+1\right)^2}{\left(\dfrac{2}{x}-1\right)\left(\dfrac{3}{x}-1\right)^2\left(\dfrac{4}{x}-1\right)^2}=1.$$

Tổng quát: Giả sử $R(x)=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}$, với $a_n\neq 0$ và $b_m\neq 0$.

Ta có:

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\infty & \text{khi } n>m\\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{khi } n=m\\ 0 & \text{khi } n<m\end{cases}.$$

Ví dụ 2: Tính giới hạn :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Giải

Chia cả tử và mẫu cho x, với lưu ý :

$$\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}=\begin{cases}\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}} & \text{khi } x>0\\ -\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}} & \text{khi } x<0\end{cases}.$$

Do đó ta xét hai trường hợp :

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}=1.$$
- $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}=-1.$$

Vậy :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}\neq\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$$

suy ra $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$ không tồn tại.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính giới hạn sau:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(x^2+1)(x^3+2)}{x^6}.$$

Bài tập 2. Tính giới hạn sau:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x^2+2)(2x+3)^3}{x^3(x+1)(2x-1)^2}.$$

Bài tập 3. Tính các giới hạn sau :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+1}{\sqrt{1-x+4x^2}-x}$.

Bài tập 4. Tính các giới hạn sau :

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

b. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+a}}$, với a > 0.

Bài toán 3. Giới hạn dạng $\infty - \infty$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các phương pháp đã biết để tính giới hạn dạng $\frac{\infty}{\infty}$ chúng ta tính được giới hạn dạng $\infty - \infty$ thông qua phép nhân liên hợp.

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1} - x)$. b. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1} + x - 1)$.

Giải

a. Ta có :

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1} - x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

b. Ta có :

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1} + x - 1) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-(x-1)^2}{\sqrt{x^2+1}-x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}-x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1+\frac{1}{x}} = -1.$$

Ví dụ 2: Cho hàm số :

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{x^2-2x+4}.$$

Tính các giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, từ đó nhận xét về sự tồn tại của giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Giải

Ta có :

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{x^2-2x+4})$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-2x+4}} = -2.$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{x^2-2x+4})$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-2x+4}} = 2.$$

Vậy :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \neq \lim_{x \to -\infty} f(x),$$

suy ra $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ không tồn tại.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tính các giới hạn sau :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2 - x} - 2x)$.

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x)$.

Bài tập 2: Cho hàm số :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Tính các giới hạn $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, từ đó nhận xét về sự tồn tại của giới hạn $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Bài toán 4. Giới hạn của hàm số lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có kết quả:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ví dụ 1: Tính các giới hạn :

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x}$.

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg}x}{x}$.

Giải

a. Ta có :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x.\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2}.$$

b. Ta có :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg}x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} . \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Chú ý Từ đây chúng ta có kết quả :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg}x}{x} = 1 \text{ và } \lim_{x \to 0} \frac{\text{tg}(kx)}{kx} = 1.$$

Ví dụ 2: Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x - \cos 3x.\cos 5x}{x^2}.$$

Giải

Ta có :

$$\cos 4x - \cos 3x.\cos 5x = \cos 4x - \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2}(2\cos 4x - \cos 8x - \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2}[(1-\cos 8x) + (1-\cos 2x) - 2(1-\cos 4x)]$$

$$= \sin^2 4x + \sin^2 x - 2\sin^2 2x$$

Do đó :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x - \cos 3x\cos 5x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x + \sin^2 x - 2\sin^2 2x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 4x}{x^2} + \frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{2\sin^2 2x}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{16\sin^2 4x}{(4x)^2} + \frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{8\sin^2 2x}{(2x)^2}\right]$$

$$= 16 + 1 - 8 = 9.$$

Ví dụ 3: Tính giới hạn:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$. b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

Giải

a. Ta có :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}(1+\sqrt{\cos x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}.\left(\frac{x}{2}\right)^2.\frac{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}.\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}.\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}\right]$$

$$= 0.$$

b. Ta có :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3(\sqrt{1+tgx}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{tgx(1-\cos x)}{x^3(\sqrt{1+tgx}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2tgx.\sin^2\frac{x}{2}}{x^3(\sqrt{1+tgx}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left[\frac{tgx}{x}\,\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2.4}.\frac{1}{\sqrt{1+tgx}+\sqrt{1+\sin x}}\right]=\frac{1}{4}.$$

Ví dụ 4: Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos x}{x^2}.$$

Giải

Cách 1 : Ta có :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-\cos^2 x}{\left(\sqrt{1+x^2}+\cos x\right)x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{\left(\sqrt{1+x^2}+\cos x\right)x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\cos x}.\left(1+\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)$$

$$=1.$$

Cách 2 : Ta có :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}+\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right]=1.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+tg3x}{x}$.   b. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{tg2x}$.

Bài tập 2. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 2x}{x\sin x}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}x-\sin x}{x^3}$.

c. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-2}{\sin(x-1)}$.

d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin^2\dfrac{x}{2}}$.

e. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2x}{\text{tg}(x-1)}$.

Bài tập 3. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax+\text{tg}bx}{(a+b)x}$.

Bài tập 4. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 7(\pi-x)}{4(\pi-x^2)}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}$.

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x+\text{tg}^2x}{x\sin x}$.

d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{98}{83}\left(\dfrac{1-\cos 3x\cos 5x\cos 7x}{\sin^2 7x}\right)$.

Bài tập 5. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x\sin x-\text{tg}x}{x^2\sin x}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos ax-\cos bx\cos cx}{x^2}$.

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\text{tg}x}\right)$.

d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cos 2x\ldots\cos nx}{x^2}$.

Bài tập 6. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x}-\cos x}{\sin^2 x}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^4 x-\sin^4 x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

Bài toán 5. Giới hạn dạng 1^∞, $0.\infty$, ∞^0.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Đối với dạng 1^∞ cần nhớ các giới hạn cơ bản sau :

a. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

b. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Việc áp dụng chúng để tìm giới hạn của hàm số trong nhiều trường hợp cần thực hiện các phép biến đổi phù hợp.

2. Đối với dạng $0.\infty$ và ∞^0, ta chọn một trong hai cách sau :

Cách 1 : Sử dụng phương pháp biến đổi để tận dụng các dạng giới hạn cơ bản.

Cách 2 : Sử dụng nguyên lí kẹp giữa, với các bước :

Bước 1: Chọn hai hàm số g(x), h(x) thoả mãn :

$$g(x) \le f(x) \le h(x).$$

Bước 2: Khẳng định

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$$

$$\left(\text{hoặc } \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = L\right).$$

Bước 3: Vậy :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \text{ (hoặc } \lim_{x\to\infty} f(x) = L).$$

Ví dụ 1: Tính giới hạn :

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}.$$

Giải

Ta có :

$$(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}} = (1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}.\frac{\sin 2x}{x}} = (1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}.\frac{\sin 2x}{2x}.2}.$$

Do đó :

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} (1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}.\frac{\sin 2x}{2x}.2} = e^2.$$

Ví dụ 2: Tính giới hạn :

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{2x}.$$

Giải

Ta có :

$$\left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{2x} = \left(1+\frac{6}{3x-1}\right)^{2x},$$

đặt $\frac{1}{t} = \frac{6}{3x-1} \Leftrightarrow x = \frac{6t+1}{3}$.

Nhận xét khi $x\to\infty$ thì $t\to\infty$.

Vậy :

$$\left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{2x} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{2\frac{6t+1}{3}} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\frac{2(6t+1)}{3t}}.$$

Do đó :

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{2x} = \lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\frac{2(6t+1)}{3t}} = e^4.$$

Chú ý: Với hàm số $f(x) = u(x)^{v(x)}$, $u(x) > 0$ ở lân cận x_0, giả sử cần xác định

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

trong trường hợp giới hạn có dạng vô định, ta chọn một trong hai cách sau :

Cách 1 : Sử dụng phương pháp biến đổi để tận dụng các dạng giới hạn cơ bản của 1^∞.

Cách 2 : Xét :

$$\lim_{x \to x_0} [\ln f(x)] = \lim_{x \to x_0} [v(x).\ln u(x)] = A \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = e^A.$$

Ví dụ 3: Tính giới hạn :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\mathrm{tg}x}.$$

Giải

Cách 1 : Ta biến đổi :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\mathrm{tg}x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin^2 x)^{\frac{\mathrm{tg}x}{2}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)^{\frac{1}{\cos^2 x}.\sin x.\cos x}$$

$$= e^0 = 1.$$

Cách 2 : Xét :

$$A = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} [\ln(\sin x)^{\mathrm{tg}x}] = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} [\mathrm{tg}x.\ln(\sin x)].$$

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - t$.

Nhận xét, khi $x \to \frac{\pi}{2}$ thì $t \to 0$.

Vậy :

$$A = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} [\mathrm{tg}x.\ln(\sin x)] = \lim_{t \to 0} \left\{ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right).\ln\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right]\right\}$$

$$= \lim_{t \to 0} [\mathrm{cotg}t.\ln(\cos t)] = \lim_{t \to 0} \left\{ \frac{\cos t}{\sin t}.\ln[1 + (\cos t - 1)] \right\}$$

$$= \lim_{t \to 0} \left\{ \cos t.\frac{t}{\sin t}.\frac{\ln[1 + (\cos t - 1)]}{\cos t - 1}.\frac{\cos t - 1}{t} \right\}$$

$$= \lim_{t \to 0} \left\{ \cos t.\frac{t}{\sin t}.\frac{\ln[1 + (\cos t - 1)]}{\cos t - 1}.\frac{\sin\frac{t}{2}}{t}\left(-2\sin\frac{t}{2}\right) \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\mathrm{tg}x} = e^0 = 1.$$

Ví dụ 4: Tính giới hạn :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right).\text{tg}x\right].$$

Giải

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - t$.

Nhận xét khi $x \to \frac{\pi}{2}$ thì $t \to 0$.

Vậy :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right).\text{tg}x\right] = \lim_{t \to 0}\left[t.\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right] = \lim_{t \to 0}[t.\text{cotg}t]$$

$$= \lim_{t \to 0}\left(t.\frac{\cos t}{\sin t}\right) = 1.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính các giới hạn :

a. $\lim_{x \to 0} (1 + \sin 3x)^{\frac{1}{x}}$.

b. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1}$.

Bài tập 2. Tính giới hạn :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\text{tg}2x.\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right].$$

Bài tập 3. Tính giới hạn:

$$\lim_{x \to 1} \left[(x-1)^2.\sin\frac{1}{x-1}\right].$$

Bài tập 4. Tính giới hạn:

$$\lim_{x \to 0} \left(x.\cos\frac{1}{x}\right).$$

CHỦ ĐỀ 4

HÀM SỐ LIÊN TỤC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1: *Cho hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên khoảng* (a, b). *Hàm số* $y = f(x)$ *được gọi là liên tục tại điểm* $x_0 \in (a, b)$ ***nếu*** :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Nếu tại điểm x_0 hàm số $y = f(x)$ **không liên tục, thì được** gọi là *gián đoạn* tại x_0 và điểm x_0 được gọi là ***điểm gián đoạn*** **của hàm số** $y = f(x)$.

Chú ý 1: Hàm số $y = f(x)$ **được gọi là liên tục tại điểm** x_0 **nếu** ba điều kiện sau được đồng thời thoả mãn :

(i) $f(x)$ xác định tại x_0.

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ tồn tại.

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn **tại điểm** x_0 **nếu một trong** ba điều kiện trên không được thoả mãn.

Chú ý 2: Nếu sử dụng **giới hạn một phía thì** :

1. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ tồn tại và $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ **thì hàm** số $y = f(x)$ được gọi là *liên tục trái tại điểm* x_0.
2. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ tồn tại và $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ **thì hàm** số $y = f(x)$ được gọi là *liên tục phải tại điểm* x_0.
3. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Đặc trưng khác của tính liên tục tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ **xác định trên** $(a ; b)$. **Giả sử** x_0 và $x (x \neq x_0)$ là hai phần tử của $(a ; b)$.

- Hiệu $x - x_0$, **kí hiệu là** Δx **(đọc là đen - ta x), được** gọi là *số gia của đối số tại điểm* x_0. Ta có :

$$\Delta x = x - x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + \Delta x.$$

- Hiệu $y - y_0 = f(x) - f(x_0)$, **kí hiệu là** Δy, **được** gọi là *số gia tương ứng của hàm số tại điểm* x_0. Ta có :

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Đặc trưng : Dùng khái niệm **số gia, ta có thể đặc trưng tính** liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 như sau :

Định lí 1. *Một hàm số $y = f(x)$, xác định trên $(a; b)$, là liên tục tại $x_0 \in (a; b)$ nếu và chỉ nếu :*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Chứng minh.

Thật vậy, ta có :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa 2: Ta có :

1. *Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trong khoảng $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mỗi điểm của khoảng đó.*
2. *Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó*
   - *Liên tục trong khoảng $(a; b)$,*
   - $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ *(liên tục bên phải tại điểm a),*
   - $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ *(liên tục bên trái tại điểm b).*

Chú ý **:**

1. Đồ thị của một hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó.
2. Khi ta nói hàm số $y = f(x)$ liên tục mà không chỉ ra trên khoảng nào thì có nghĩa là hàm số liên tục trên tập xác định của nó.

3. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ HÀM SỐ LIÊN TỤC

Định lí 2. *Tổng, hiệu, tích, thương (với mẫu khác 0) của các hàm số liên tục tại một điểm là hàm số liên tục tại điểm đó.*

Định lí 3. *Các hàm số đa thức, hàm số hữu tỉ, hàm số lượng giác là liên tục trên tập xác định của chúng.*

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm – Dạng I.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ khi } x \neq x_0 \\ f_2(x) \text{ khi } x = x_0 \end{cases}.$$

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục tại điểm x_0, chúng ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Tính giới hạn:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) = L.$$

Bước 2: Tính $f(x_0) = f_2(x_0)$.

Bước 3: Đánh giá hoặc giải phương trình $L = f_2(x_0)$, từ đó đưa ra kết luận

Ví dụ 1: Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ x + a & \text{khi } x = 1 \end{cases}.$$

Giải

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Ta có :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2,$$

$$f(1) = a + 1.$$

Vậy :

- Nếu:

$$2 = a + 1 \Leftrightarrow a = 1 \Leftrightarrow f(1) = 2 = \lim_{x \to 1} f(x),$$

thì hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

- Nếu:

$$2 \neq a + 1 \Leftrightarrow a \neq 1 \Leftrightarrow f(1) \neq 2 = \lim_{x \to 1} f(x),$$

thì hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + a & \text{khi } x = 1 \end{cases}.$$

Bài tập 2: Xét tính liên tục của các hàm số sau tại các điểm x = 0 và x = 3:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{khi } x = 0 \\ \dfrac{x^2 - x - 6}{x(x - 3)} & \text{khi } x^2 - 3x \neq 0 \\ b & \text{khi } x = 3 \end{cases}.$$

Bài tập 3: Tổng hai hàm $f(x) + g(x)$ có nhất thiết phải gián đoạn tại điểm x_0 đã cho hay không, nếu :

a. Hàm $f(x)$ liên tục còn hàm $g(x)$ gián đoạn tại $x = x_0$.

b. Cả hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ đều gián đoạn tại $x = x_0$.

Nêu các ví dụ tương ứng.

Bài toán 2: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm – Dạng II.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ khi } x < x_0 \\ f_2(x) \text{ khi } x \geq x_0 \end{cases}.$$

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục tại điểm x_0, chúng ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Tính $f(x_0) = f_2(x_0)$.

Bước 2: (*Liên tục trái*) Tính :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f_1(x) = L_1.$$

Đánh giá hoặc giải phương trình $L_1 = f_2(x_0)$, từ đó đưa ra lời kết luận về liên tục trái.

Bước 3: (*Liên tục phải*) Tính :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f_2(x) = L_2.$$

Đánh giá hoặc giải phương trình $L_2 = f_2(x_0)$, từ đó đưa ra lời kết luận về liên tục phải.

Bước 4: **Đánh giá hoặc giải phương trình $L_1 = L_2$, từ đó đưa ra lời kết luận.**

Ví dụ 1: Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x + a \text{ khi } x < 0 \\ x^2 + 1 \text{ khi } x \geq 0 \end{cases}.$$

Giải

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Ta có :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1 \text{ và } \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x + a) = a.$$

$f(0) = 1$.

Vậy :

- Nếu $a = 1$ thì:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 1 \Leftrightarrow \text{hàm số liên tục tại } x_0 = 1$$

- Nếu $a \neq 1$ thì:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) \Leftrightarrow \text{hàm số gián đoạn tại } x_0 = 1.$$

Ví dụ 2: Cho hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}.$$

a. Tìm a để f(x) liên tục trái tại điểm x = 1.

b. Tìm a để f(x) liên tục phải tại điểm x = 1.

c. Tìm a để f(x) liên tục trên **R**.

Giải

Ta có :

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{khi } x > 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \\ 2 - x & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

a. Để f(x) liên tục trái tại điểm x = 1

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) \text{ tồn tại và } \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1).$$

Ta có :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2 - x) = 1 \text{ và } f(1) = a.$$

Vậy, điều kiện là a = 1.

b. Để f(x) liên tục phải tại điểm x = 1

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to 1^+} f(x) \text{ tồn tại và } \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1).$$

Ta có :

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x - 2) = -1 \text{ và } f(1) = a.$$

Vậy, điều kiện là a = − 1.

c. Hàm số liên tục trên **R** trước hết phải có

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Leftrightarrow 1 = -1 \text{ (mâu thuẫn).}$$

Vậy, không tồn tại a để hàm số liên tục trên **R**.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2a & \text{khi } x < 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}.$$

Bài tập 2: Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm x = 1 và x = − 1:

$$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x| \leq 1 \\ |x - 1| & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}.$$

Bài toán 3: Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục trên khoảng I, chúng ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Xét tính liên tục của hàm số trên các khoảng đơn.

Bước 2: Xét tính liên tục của hàm số tại các điểm giao.

Bước 3: Kết luận.

Ví dụ 1: Chứng tỏ rằng hàm số sau liên tục trên **R** :

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}.$$

Giải

Hàm số f(x) liên tục với mọi $x \neq 0$.

Xét tính liên tục của f(x) tại điểm $x = 0$.

Ta có :

$$\left|x.\cos\frac{1}{x^2}\right| = |x|.\left|\cos\frac{1}{x^2}\right| \le |x|$$

$$\Rightarrow -|x| \le x\cos\frac{1}{x^2} \le |x| \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(x.\cos\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Mặt khác $f(0) = 0$.

Do đó, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow$ hàm số liên tục tại điểm $x = 0$.

Vậy hàm số liên tục trên toàn trục số thực **R**.

Ví dụ 2: Xét tính liên tục của hàm số sau trên toàn trục số :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ ax + 1 & \text{khi } x \ge 1 \end{cases}.$$

Giải

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

1. Khi $x < 1$, ta có $f(x) = x^2 + x$ nên hàm số liên tục với $x < 1$.
2. Khi $x > 1$, ta có $f(x) = ax + 1$ nên hàm số liên tục với $x > 1$.
3. Khi $x = 1$, ta có :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2 + x) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(ax + 1) = a + 1.$$

$$f(1) = a + 1.$$

Do đó :

- Nếu a = 1 thì $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 2$, do đó hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.
- Nếu a ≠ 1 thì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, do đó hàm số gián đoạn tại $x_0 = 1$.

Kết luận :

- Nếu a = 1, hàm số liên tục trên toàn trục số.
- Nếu a ≠ 1, hàm số liên tục trên $(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$ và gián đoạn tại $x_0 = 1$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xác định a, b để hàm số sau liên tục trên toàn trục số:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } |x| \le \dfrac{\pi}{2} \\ ax + b & \text{khi } |x| > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Bài tập 2: Xét tính liên tục của hàm hợp y = f(u) trong đó u = g(x) nếu :

$$f(u) = \begin{cases} u & \text{khi } u > 0 \\ u - 1 & \text{khi } u \le 0 \end{cases} \text{ và } g(x) = \begin{cases} x & \text{khi } |x| > 0 \\ x - 1 & \text{khi } |x| \le 0 \end{cases}.$$

Bài tập 3: Có thể khẳng định rằng bình phương của một hàm gián đoạn cũng là một hàm gián đoạn hay không ? Tìm ví dụ minh hoạ.

Bài tập 4: Chứng minh rằng nếu f(x) là hàm liên tục thì hàm số F(x) = |f(x)| cũng là một hàm liên tục.

Bài tập 5: Cho f là hàm số liên tục trên $[0, +\infty)$ mà $f(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ $\forall t > 0$. Chứng tỏ rằng hàm số g cho bởi công thức sau:

$$g(x) = \begin{cases} f(\text{tg}x) & \text{khi } 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ f(0) & \text{khi } x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

cũng liên tục trên $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

CHỦ ĐỀ 5

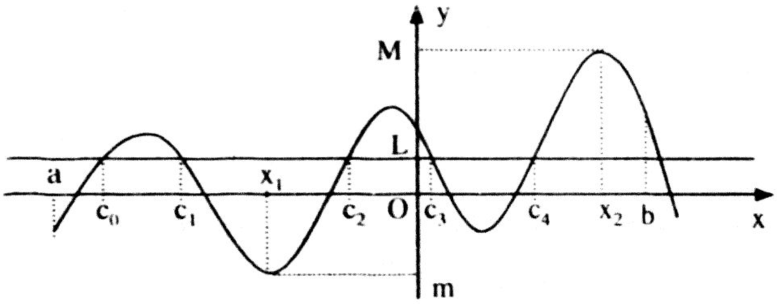
TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ LIÊN TỤC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định lí 4. *Nếu hàm số* y = f(x) *liên tục và dương khi* x = a *thì nó dương trên một khoảng nào đó chứa điểm* a.

Định lí 5. *Nếu hàm số* y = f(x) *liên tục trên đoạn* [a, b], *thì nó đạt được giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất và mọi giá trị trung gian giữa giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn đó.*

Giải thích:



Tồn tại ít nhất một điểm $x_1 \in [a, b]$ và một điểm $x_2 \in [a, b]$ sao cho với mọi $x \in [a, b]$ ta có : $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$. Khi đó :

- Đặt m = $f(x_1)$ thì m là giá trị nhỏ nhất của f(x) trên đoạn [a, b].
- Đặt M = $f(x_2)$ thì M là giá trị lớn nhất của f(x) trên đoạn [a, b].

Với mọi giá trị trung gian L giữa m và M, tức là sao cho $m \le L \le M$, tồn tại ít nhất một điểm $c \in [a, b]$ sao cho f(c) = L.

Hệ quả.

- *Nếu hàm số* y = f(x) *liên tục trên đoạn* [a, b] *và* f(a)f(b) < 0 *thì tồn tại ít nhất một điểm* $x_0 \in (a, b)$ *sao cho* $f(x_0) = 0$.
- Nói cách khác: *Nếu hàm số* y = f(x) *liên tục trên đoạn* [a, b] *và* f(a)f(b) < 0 *thì phương trình* f(x) = 0 *có ít nhất một nghiệm trong khoảng* (a, b).

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Sử dụng tính liên tục của hàm số chứng minh phương trình có nghiệm.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho phương trình :

$$f(x) = 0.$$

Để chứng minh phương trình có k nghiệm trong [a, b], ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Chọn các số $a < T_1 < T_2 < \ldots < T_{k-1} < b$ chia đoạn $[a, b]$ thành k khoảng thoả mãn :

$$\begin{cases} f(a).f(T_1) < 0 \\ \ldots \\ f(T_{k-1}).f(b) < 0 \end{cases}.$$

Bước 2: Kết luận về số nghiệm của phương trình trên đoạn $[a, b]$.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng phương trình :

$$x^5 + x - 1 = 0$$

có nghiệm trên khoảng $(-1, 1)$.

Giải

Xét hàm số $f(x) = x^5 + x - 1$ liên tục trên **R**.

Ta có :

$$f(-1).f(1) = -3.1 = -3 < 0,$$

Vậy phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1, 1)$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng phương trình :

$$2x + 6\sqrt[3]{1-x} = 3.$$

có ba nghiệm phân biệt thuộc $(-7, 9)$.

Giải

Đặt $t = \sqrt[3]{1-x}$.

Khi đó phương trình có dạng :

$$2t^3 - 6t + 1 = 0.$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 6t + 1$ liên tục trên **R**.

Ta có :

$$f(-2) = -3, f(0) = 1, f(1) = -3, f(2) = 5,$$

suy ra :

- $f(-2).f(0) = -3 < 0$, phương trình có một nghiệm $t_1 \in (-2, 0)$, khi đó :

  $$t_1 = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow x_1 = 1 - t_1^3 \text{ và } t_1 \in (1, 9).$$

- $f(0).f(1) = -3 < 0$, phương trình có một nghiệm $t_2 \in (0, 1)$, khi đó :

  $$t_2 = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow x_2 = 1 - t_2^3 \text{ và } t_2 \in (0, 1).$$

- $f(1).f(2) = -15 < 0$, phương trình có một nghiệm $t_3 \in (1, 2)$, khi đó :

  $$t_3 = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow x_3 = 1 - t_3^3 \text{ và } t_3 \in (-7, 0).$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm trên khoảng $(-7, 9)$.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi m phương trình :

$$x^3 + mx^2 - 1 = 0$$

luôn có một nghiệm dương.

Giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 - 1$ liên tục trên **R**.

Ta có :

$f(0) = -1 < 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, vậy tồn tại $c > 0$ để $f(c) > 0$,

suy ra :

$f(0).f(c) < 0$.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ luôn có một nghiệm thuộc $(0, c) \Leftrightarrow$ phương trình luôn có một nghiệm dương.

Ví dụ 4: Cho phương trình :

$$|x|^3 - mx^2 + (m + 1)|x| - 2 = 0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

Giải

Đặt $t = |x|$, $t \geq 0$, ta được :

$$t^3 - mt^2 + (m + 1)t - 2 = 0. \qquad (2)$$

a. Với $m = 1$, phương trình có dạng :

$t^3 - t^2 + 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Với $m = 1$, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \pm 1$.

b. Xét hàm số $f(t) = t^3 - mt^2 + (m + 1)t - 2$ liên tục trên **R**.

Ta có :

$f(0) = -2 < 0$,

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty \Rightarrow \exists c > 0$ sao cho $f(c) > 0$,

suy ra :

$f(0).f(c) < 0$, (2) có một nghiệm $t_1 \in (0, c) \Rightarrow x = \pm t_1$.

Vậy, với mọi m phương trình luôn có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng với mọi m phương trình :

$$(\sqrt{x - 1})^3 + mx = m + 1.$$

luôn có một nghiệm lớn hơn 1.

Giải

Đặt $t = \sqrt{x - 1}$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó phương trình có dạng :

$$f(t) = t^3 + mt^2 - 1 = 0.$$

Xét hàm số $y = f(t)$ liên tục trên $[0, +\infty)$.

Ta có :

$$f(0) = -1 < 0$$

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$, vậy tồn tại $c > 0$ để $f(c) > 0$,

suy ra :

$$f(0).f(c) < 0.$$

Vậy phương trình $f(t) = 0$ luôn có một nghiệm thuộc $t_0 \in (0, c)$, khi đó :

$$\sqrt{x-1} = t_0 \Leftrightarrow x = t_0^2 + 1 > 1.$$

Vậy, với mọi m phương trình luôn có một nghiệm lớn hơn 1.

Ví dụ 6: Cho a, b, c là ba số dương phân biệt. Chứng minh rằng phương trình :

$$a(x-b)(x-c) + b(x-a)(x-c) + c(x-b)(x-a) = 0$$

luôn có hai nghiệm phân biệt.

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a < b < c$ và đặt :

$$f(x) = a(x-b)(x-c) + b(x-a)(x-c) + c(x-b)(x-a)$$

Ta có :

$f(b) = b(b-a)(b-c) < 0$ và hệ số x^2 của $f(x)$ bằng $a + b + c > 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $x_1 < b < x_2$.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng phương trình :

$$p(x-a)(x-c) + q(x-b)(x-d) = 0$$

luôn có nghiệm, biết rằng $a \le b \le c \le d$, p và q là hai số thực bất kì.

Giải

Xét hàm số $f(x) = p(x-a)(x-c) + q(x-b)(x-d)$ liên tục trên R.

Nếu $p = q = 0$, phương trình có nghiệm tuỳ ý.

Nếu $p \ne 0$ hoặc $q \ne 0$, không mất tính tổng quát ta giả sử $p \ne 0$. Khi đó :

$f(b) = p(b-a)(b-c)$ và $f(d) = p(d-a)(d-c)$,

suy ra :

$$f(b).f(d) = p^2(b-a)(b-c)(d-a)(d-c) \le 0.$$

Vậy, phương trình luôn có nghiệm.

Ví dụ 8: Cho $m > 0$ và a, b, c là ba số thực bất kì thoả mãn :

$$\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm :

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Giải

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Ta có :

$$f(0) = c,$$

$$f\left(\frac{m+1}{m+2}\right) = \frac{(m+1)^2}{m+2}\left[\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c(m+2)}{(m+1)^2}\right] = \frac{-c}{m(m+2)},$$

suy ra :

$$f(0).f(\frac{m+1}{m+2}) = \frac{-c^2}{m(m+2)} \le 0.$$

Vậy, phương trình (1) có nghiệm.

Ví dụ 9: Chứng minh rằng với mọi m phương trình :

$$\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = m \qquad (1)$$

luôn có nghiệm.

Giải

Điều kiện $x \neq \frac{k\pi}{2}$, với $k \in \mathbf{Z}$.

Biến đổi phương trình về dạng :

$$\sin x - \cos x - m\sin x.\cos x = 0.$$

Xét hàm số $f(x) = \sin x - \cos x - m\sin x.\cos x$ liên tục trên đoạn $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có :

$$f(0) = -1 < 0 \text{ và } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0 \Rightarrow f(0).f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0.$$

Vậy phương trình $f(x) = 0$ luôn có một nghiệm thuộc $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) luôn có một nghiệm thuộc khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Chứng minh rằng phương trình :

$$x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$$

có nghiệm thuộc (– 1, 1).

Bài tập 2. Chứng minh rằng phương trình :

$$x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$$

có năm nghiệm trên khoảng (– 2, 2).

Bài tập 3. Cho phương trình :

$$x^2 - m|x| - 1 = 0.$$

Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 4. Chứng minh rằng với mọi m > 2 phương trình :

$$|x|^3 - 2mx^2 + 2 = 0.$$

luôn có bốn nghiệm phân biệt.

Bài tập 5. Chứng minh rằng phương trình :

$$p(\sqrt[3]{1-x} - a)(\sqrt[3]{1-x} - c) + q(\sqrt[3]{1-x} - b)(\sqrt[3]{1-x} - d) = 0$$

luôn có nghiệm, biết rằng $a \le b \le c \le d$, p và q là hai số thực bất kì.

Bài tập 6. Cho phương trình :

$$a(\sqrt[3]{x} - b)(\sqrt[3]{x} - c) + b(\sqrt[3]{x} - c)(\sqrt[3]{x} - a) + c(\sqrt[3]{x} - a)(\sqrt[3]{x} - b) = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với a, b, c là ba số tuỳ ý.

Bài tập 7. Chứng minh rằng phương trình :

$$\sin x - x + 1 = 0$$

luôn có nghiệm.

Bài tập 8. Chứng minh rằng phương trình :

$$a(x-b)(x-c) + b(x-c)(x-a) + c(x-a)(x-b) = 0$$

luôn có nghiệm với a, b, c là ba số tuỳ ý.

Bài toán 2: Sử dụng tính liên tục của hàm số xét dấu hàm số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng kết quả:

"*Nếu hàm số* y = f(x) *liên tục và không triệt tiêu trên đoạn* [a, b] *thì có dấu nhất định trên* (a, b)".

Ví dụ 1: Xét dấu hàm số:

$$f(x) = \sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} - \sqrt{1-2x}.$$

Giải

Hàm số f(x) liên tục trên $[-4, \frac{1}{2}]$.

Giải phương trình f(x) = 0, ta có:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \ge 0 \\ 1-2x \ge 0 \\ 1-x+1-2x+2\sqrt{(1-x)(1-2x)} = x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x \le \frac{1}{2} \\ \sqrt{(1-x)(1-2x)} = 2x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{1}{2} \\ 2x+1 \ge 0 \\ (1-x)(1-2x) = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 2x^2 + 7x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Như vậy, trên các khoảng $[-4, 0)$ và $(0, \frac{1}{2}]$ hàm số f(x) không triệt tiêu, do đó:

- Vì $f(-1) = \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$ nên $f(x) < 0$ với $\forall x \in [-4, 0)$.
- Vì $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} > 0$ nên $f(x) > 0$ với $\forall x \in (0, \frac{1}{2}]$.

Ví dụ 2: Xét dấu hàm số:

$$f(x) = 2 + \cos x - 2\text{tg}\frac{x}{2} \text{ trên } (0, \pi).$$

Giải

Hàm số f(x) liên tục trên $(0, \pi)$.

Giải phương trình $f(x) = 0$ với ẩn phụ $t = \text{tg}\frac{x}{2}$, suy ra $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, ta có:

$$2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 2t = 0 \Leftrightarrow 2t^3 - t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2 + t + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \text{tg}\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

Như vậy, trên các khoảng $(0, \frac{\pi}{2})$ và $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ hàm số f(x) không triệt tiêu, do đó:

- Vì $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 + \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$ nên $f(x) > 0$ với $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
- Vì $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 - \frac{1}{2} - 2\sqrt{3} < 0$ nên $f(x) < 0$ với $\forall x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Xét dấu các hàm số sau:

a. $f(x) = 2\sqrt{x+1} - x - 1$.

b. $f(x) = x - \sqrt{2x+3}$.

c. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x + 1$.

d. $f(x) = x^2 + \sqrt{x+1} - 1$.

Bài tập 2. Xét dấu hàm số:

$$f(x) = \sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+3}.$$

Bài tập 3. Xét dấu các hàm số sau:

a. $f(x) = 6\text{tg}x - \text{tg}2x$.

b. $f(x) = \sin 4x - \text{tg}x$.

c. $f(x) = \sin 2x + 2\text{tg}x - 3$.

d. $f(x) = 1 + 3\sin 2x - 2\text{tg}x$.

Bài tập 4. Xét dấu các hàm số sau:

a. $f(x) = (1 - \text{tg}x)(1 + \sin 2x) - 1 - \text{tg}x$.

b. $f(x) = 3\sin x + \cos x - 4\text{cotg}\frac{x}{2} + 1$.

ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG III

ĐỀ SỐ 1

(Thời gian 60 phút)

Câu I. (3 điểm):

a. Dùng định nghĩa giới hạn, chứng minh rằng:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

b. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$. Chứng minh rằng dãy số my có giới hạn.

c. Tính giới hạn sau:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n.(n+1)}\right].$$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** ∞.

Câu II. (4 điểm):

a. (2 điểm): Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

$$\lim_{x\to 1}(3x-1)=2.$$

b. (1 điểm): Tính giới hạn:

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-\sqrt{3x-2}}{x-1}.$$

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

c. (1 điểm): Tính giới hạn:

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x^2+1)(x^3+2)}{x^6}.$$

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** ∞.

Câu III. (3 điểm):

a. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x_0 = 1$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+a & \text{khi } x=1\end{cases}.$$

b. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm thuộc $(-1, 1)$:

$$x^4+x^3-3x^2+x+1=0.$$

c. Xét dấu hàm số:

$$f(x)=\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+3}.$$

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian 60 phút)

Câu I. (3 điểm):

a. Dùng định nghĩa giới hạn, chứng minh rằng:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0.$$

b. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn.

c. Tính giới hạn sau:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^2}+\ldots+\frac{2n-1}{n^2}\right).$$

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** ∞.

Câu II. (4 điểm):

a. (2 điểm): Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

b. (1 điểm): Tính giới hạn

$$L = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}.$$

A. 3. **B.** -3. **C.** 1. **D.** 6.

c. (1 điểm): Tính giới hạn

$$L = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{1-x+4x^2}-x}.$$

A. -1. **B.** ∞. **C.** 0. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu III. (3 điểm):

a. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x+2a & \text{khi } x<0 \\ x^2+x+1 & \text{khi } x\geq 0 \end{cases}.$$

b. Chứng minh rằng phương trình sau có năm nghiệm thuộc $(-2, 3)$:

$$x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0.$$

c. Xét dấu hàm số:

$$f(x) = \sin 2x + 2\tan x - 3.$$

CHƯƠNG IV
ĐẠO HÀM

CHỦ ĐỀ 1
ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. MỞ ĐẦU

Nhiều bài toán của toán học, vật lí, hoá học, sinh học, kĩ thuật ... đòi hỏi phải tìm giới hạn dạng:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

trong đó f(x) là một hàm số đã cho của đối số x.

Qua Đại số và Giải tích 11, ta đã biết định nghĩa và kí hiệu của số gia đối số và số gia tương ứng của hàm số:

- Số gia đối số là $\Delta x = x - x_0$.
- Số gia tương ứng của hàm số là $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

Ta sẽ dùng khái niệm và kí hiệu đó để viết các giới hạn trên:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

2. ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM

Cho hàm số $y = f(x)$, xác định trên (a, b) và $x_0 \in (a, b)$.

Giới hạn, nếu có, của tỉ số giữa số gia của hàm số và số gia của đối số tại x_0, *khi số gia đối số dần tới 0, được gọi là đạo hàm của hàm số* $y = f(x)$ *tại điểm* x_0.

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 được kí hiệu là $y'(x_0)$ hoặc $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{hoặc } y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

3. ĐẠO HÀM MỘT BÊN

a. *Đạo hàm bên trái của hàm số* $y = f(x)$ *tại điểm* x_0, *kí hiệu là* $f'(x_0^-)$, *được định nghĩa là:*

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

trong đó $x \to x_0^-$ được hiểu là $x \to x_0$ và nhỏ hơn x_0.

b. *Đạo hàm bên phải của hàm số* $y = f(x)$ *tại điểm* x_0, *kí hiệu là* $f'(x_0^+)$, *được định nghĩa là*:

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

trong đó $x \to x_0^+$ được hiểu là $x \to x_0$ và lớn hơn x_0.

Định lí: *Hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm tại điểm* x_0 *thuộc tập xác định của nó, nếu và chỉ nếu* $f'(x_0^-)$ *và* $f'(x_0^+)$ *tồn tại và bằng nhau.*

Khi đó, ta có:

$$f'(x_0) = f'(x_0^-) = f'(x_0^+).$$

4. ĐẠO HÀM TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa:

a. *Hàm số* $y = f(x)$ *được gọi là có đạo hàm trên khoảng* (a, b) *nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm trên khoảng đó.*

b. *Hàm số* $y = f(x)$ *được gọi là có đạo hàm trên đoạn* [a, b] *nếu nó có đạo hàm trên khoảng* (a, b) *và có đạo hàm bên phải tại* a, *đạo hàm bên trái tại* b.

Quy ước: Từ nay khi ta nói hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, mà không nói rõ trên khoảng nào, thì điều đó có nghĩa là đạo hàm tồn tại với mọi giá trị thuộc tập xác định của hàm số đã cho.

5. QUAN HỆ GIỮA SỰ TỒN TẠI CỦA ĐẠO HÀM VÀ TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

Định lí: *Nếu hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm tại điểm* x_0 *thì nó liên tục tại điểm đó.*

Chú ý:

1. Đảo lại không đúng, nghĩa là *một hàm số liên tục tại điểm* x_0 *có thể không có đạo hàm tại điểm đó.* Để minh hoạ ta xét hàm số :

$$y = f(x) = |x|$$

tại điểm $x_0 = 0$, ta có :

$$f(0) = 0 \text{ và } \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0.$$

Vậy, hàm số đã cho liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

Mặt khác, ta có :

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = |\Delta x| \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1 \text{ khi } \Delta x > 0 \\ -1 \text{ khi } \Delta x < 0 \end{cases}.$$

Do đó

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \text{ và } \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ không tồn tại}$$

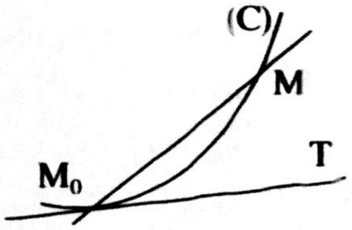
$\Rightarrow$ hàm số $y = |x|$ không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

2. Như vậy, hàm số không liên tục tại x_0 thì không có đạo hàm tại điểm đó.

6. Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

6.1. *Ý nghĩa hình học*

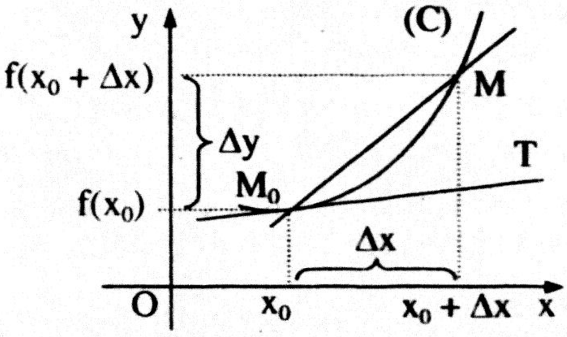
a. *Tiếp tuyến của đường cong phẳng*: Cho đường cong phẳng (C) và một điểm cố định M_0 trên (C), M là điểm di động trên (C). Khi đó M_0M là một cát tuyến của (C).



Định nghĩa: *Nếu cát tuyến M_0M có vị trí giới hạn M_0T khi điểm M di chuyển trên (C) và dần tới điểm M_0 thì đường thẳng M_0T được gọi là tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm M_0. Điểm M_0 được gọi là tiếp điểm.*

Sau đây ta không xét trường hợp tiếp tuyến song song hoặc trùng với Oy.

b. *Ý nghĩa hình học của đạo hàm*: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng (a, b) và có đạo hàm tại $x_0 \in (a, b)$, gọi (C) là đồ thị hàm số đó.



Định lí 1: *Đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0(x_0, f(x_0))$.*

c. *Phương trình của tiếp tuyến*:

Định lí 2: *Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0, f(x_0))$ là:*

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

6.2. *Ý nghĩa vật lí*

a. *Vận tốc tức thời*: Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình:

$s = f(t)$, với f(t) là hàm số có đạo hàm.

Khi đó, vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số $s = f(t)$ tại t_0.

$$v(t_0) = s'(t_0) = f'(t_0).$$

b. *Cường độ tức thời*: Điện lượng Q truyền trong dây dẫn xác định bởi phương trình:

$Q = f(t)$, với f(t) là hàm số có đạo hàm.

Khi đó, cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số $Q = f(t)$ tại t_0.

$$I(t_0) = Q'(t_0) = f'(t_0).$$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Tính đạo hàm của hàm số tại một điểm – dạng 1.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho hàm số:

$$y = f(x).$$

Để tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0, ta xác định:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ví dụ 1: **Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số:**

$$f(x) = x^2 + 4x \text{ tại điểm } x_0 = 2.$$

Giải

Ta có:

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 + 4x) - 12}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x + 6) = 8.$$

Ví dụ 2: **Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số:**

$$f(x) = \sqrt{2x + 7} \text{ tại điểm } x_0 = 1.$$

Giải

Ta có:

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x + 7} - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x + 7 - 9}{(x - 1)(\sqrt{2x + 7} + 3)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2}{\sqrt{2x + 7} + 3} = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 3: **Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số:**

$$f(x) = x^2 - \sin x \text{ tại điểm } x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Giải

Ta có :

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \sin x - \frac{\pi^2}{4} + 1}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x + \frac{\pi}{2}\right)}_{L_1} + \underbrace{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{x - \frac{\pi}{2}}}_{L_2}. \qquad (1)$$

- Với L_1, ta được :

$$L_1 = \pi. \qquad (2)$$

- Với L_2, bằng phép đổi biến $t = \frac{\pi}{2} - x$, ta được:

$$L_2 = \lim_{t\to 0} \frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{-t} = -\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = -\lim_{t\to 0} \frac{2t.\sin^2\frac{t}{2}}{4\left(\frac{t}{2}\right)^2} = 0. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được :

$$f'(\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số sau đây tại điểm x_0:

a. $f(x) = x + 2$ với $x_0 = 6$.

b. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ với $x_0 = -1$.

Bài tập 2: Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số sau đây tại điểm x_0:

a. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ với $x_0 = 2$. b. $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ với $x_0 = 3$.

Bài tập 3: Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số sau đây tại điểm x_0:

a. $f(x) = \sqrt{3x+4}$ với $x_0 = -1$.

b. $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ với $x_0 = 0$.

Bài tập 4: Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số sau đây tại điểm x_0:

a. $f(x) = \sin x + \cos 2x$ với $x_0 = 0$.

b. $f(x) = \text{tg}x + \text{cotg}x$ với $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Bài tập 5: Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số sau đây tại điểm x_0:

a. $f(x) = e^x + 1$ với $x_0 = 1$.

b. $f(x) = 2^x - 3^{2x}$ với $x_0 = 0$.

Bài tập 6: Cho hàm số $y = \sin x$.

a. Tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

b. Viết phương trình của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

Bài toán 2: Tính đạo hàm của hàm số tại một điểm – dạng 2.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ khi } x \neq x_0 \\ f_2(x) \text{ khi } x = x_0 \end{cases}.$$

Để tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0, ta xác định :

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)-f_2(x_0)}{x-x_0}.$$

Ví dụ 1: Cho hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x} & \textbf{khi } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \textbf{khi } x = 0 \end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng f(x) liên tục **tại** $x = 0$.

b. Tính đạo hàm, nếu có, của **f(x) tại điểm** $x = 0$.

Giải

a. Ta có :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-x)}{x(1+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2} = f(0).$$

Vậy, hàm số f(x) liên tục tại $x = 0$.

b. Ta có :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}-\dfrac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2-x-2\sqrt{1-x}}{2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2(2-x+2\sqrt{1-x})} = \frac{1}{8}.$$

Ví dụ 2: Dùng định nghĩa, tính **đạo hàm của hàm số** :

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x} & \textbf{khi } x \neq 0 \\ 0 & \textbf{khi } x = 0 \end{cases}$$

tại điểm $x_0 = 0$.

Giải

Hàm số f(x) xác định trong một **lân cận của** $x_0 = 0$.

Ta có :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x.\cos\frac{1}{x}.$$

Ta có :

- Với mọi $x \neq 0$ thuộc lân cận **của điểm 0 luôn có** :

$$\left|x.\cos\frac{1}{x}\right| \le |x| \Leftrightarrow -|x| \le x.\cos\frac{1}{x} \le |x|.$$

- Mặt khác $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$.

Suy ra :

$$\lim_{x\to 0} x.\cos\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases} \quad \text{tại } x_0=0.$$

Bài tập 2: Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 2x}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases} \quad \text{tại } x_0=0.$$

Bài tập 3: Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số :

$$f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases} \quad \text{tại } x_0=0.$$

Bài tập 4: Cho hàm số f xác định bởi :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng f liên tục tại $x=0$.

b. Tìm đạo hàm, nếu có, của f tại $x=0$.

Bài tập 5: Cho hàm f xác định bởi:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng hàm số f(x) liên tục tại $x=0$.

b. Tìm đạo hàm, nếu có, của f tại $x=0$.

Bài tập 6: Cho hàm f xác định bởi:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{x-1}+1 & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}.$$

a. Tìm a để hàm số f(x) liên tục tại $x=1$.

b. Với a tìm được hãy tính đạo hàm của f(x) tại $x=1$.

Bài toán 3: Tính đạo hàm của hàm số tại một điểm – dạng 3.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho hàm số :

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x) & \text{khi } x<x_0\\ f_2(x) & \text{khi } x\geq x_0\end{cases}.$$

Tính đạo hàm hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số có đạo hàm tại điểm x_0, ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Xét tính liên tục của hàm số tại điểm x_0.

Bước 2: (*Đạo hàm bên trái*) Tính:

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Bước 3: (*Đạo hàm bên phải*) Tính:

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Bước 4: Đánh giá hoặc giải $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$, từ đó đưa ra lời kết luận.

Ví dụ 1: Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số:

$$y = f(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

tại điểm $x_0 = 0$.

Giải

Ta lần lượt có :

- *Đạo hàm bên trái* của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + x + 1 - e^0}{x} = 1.$$

- *Đạo hàm bên phải* của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - e^0}{x} = 1.$$

Nhận xét rằng:

$$f'(0^-) = f'(0^+) = 1.$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$ và $f'(0) = 1$.

Ví dụ 2: Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}.$$

Tìm a, b để f(x) có đạo hàm tại điểm x = 1.

Giải

Để hàm số f(x) có đạo hàm tại điểm x = 1, trước hết f(x) phải liên tục tại x = 1, do đó :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a. \quad (1)$$

- *Đạo hàm bên trái* của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = 1$.

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

- *Đạo hàm bên phải* của hàm số y = f(x) tại điểm x = 1.

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{ax+1-a-1}{x-1} = a.$$

Hàm số y = f(x) có đạo hàm tại điểm x = 1

$$\Leftrightarrow f'(1^-) = f'(1^+) \Leftrightarrow a = 2. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được b = – 1.

Vậy, hàm số có đạo hàm tại điểm x = 1, nếu và chỉ nếu a = 2, b = – 1.

Ví dụ 3: Cho hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} p\cos x + q\sin x & \text{khi } x \le 0 \\ px + q + 1 & \text{khi } x > 0 \end{cases}.$$

Chứng tỏ rằng với mọi cách chọn p, q hàm f(x) không thể có đạo hàm tại điển x = 0.

Giải

Để hàm số f(x) có đạo hàm tại điểm x = 0 ⇒ f(x) phải liên tục tại điểm x = 0, do đó :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow p = q + 1 \Leftrightarrow q = p - 1. \qquad (1)$$

Khi đó, hàm số f(x) có dạng :

$$f(x) = \begin{cases} p\cos x + (p-1)\sin x & \text{khi } x \le 0 \\ px + p & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

- *Đạo hàm bên trái* của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{p\cos x + (p-1)\sin x - p}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{(p-1)\sin x - p(1-\cos x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{(p-1)\sin x}{x} - \frac{2px\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right] = p - 1.$$

- *Đạo hàm bên phải* của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{px+p-p}{x} = \lim_{x\to 0^+} p = p.$$

Hàm số y = f(x) có đạo hàm tại điểm x = 0, nếu và chỉ nếu:

$$f'(0) = f'(0^+) \Leftrightarrow p = p - 1 \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, với mọi cách chọn p, q hàm f(x) không thể có đạo hàm tại điểm x = 0.

Ví dụ 4: Cho hàm số :

$$f(x)=\begin{cases}(x+a)e^{-bx} & \text{khi } x<0\\ ax^2+bx+1 & \text{khi } x\ge 0\end{cases}.$$

Xác định a, b để f(x) có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

Giải

Để hàm số có đạo hàm tại $x = 0$, trước hết nó phải liên tục tại $x = 0$, do đó :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow a=1. \qquad (1)$$

- *Đạo hàm bên trái* của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x+1)e^{-bx}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(e^{-bx}-\frac{e^{-bx}-1}{-bx}.b\right)=1-b.$$

- *Đạo hàm bên phải* của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+bx+1-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}(x+b)=b.$$

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 0$, nếu và chỉ nếu :

$$f'(0^-)=f'(0^+)\Leftrightarrow 1-b=b\Leftrightarrow b=\frac{1}{2}.$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 0$ khi $a = 1$, $b=\frac{1}{2}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm a, b để hàm số sau có đạo hàm tại điểm $x = 1$

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{khi } x\le 1\\ -x^2+ax+b & \text{khi } x>1\end{cases}.$$

Bài tập 2: Tìm a để hàm số sau có đạo hàm tại $x = 0$.

$$f(x)=\begin{cases}e^x & \text{khi } x\ge 0\\ x^2+a & \text{khi } x<0\end{cases}.$$

Bài tập 3: Tìm a để hàm số sau có đạo hàm tại $x = 0$.

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)e^{-x} & \text{khi } x>0\\ -x^2-ax+1 & \text{khi } x\le 0\end{cases}.$$

Bài tập 4: Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số:

$$f(x)=\frac{x}{1-|x|}\ \text{tại điểm } x=0.$$

Bài tập 5: Cho hàm số $y = |x - 1|$. Chứng minh rằng hàm số liên tục tại $x = 1$ nhưng không có đạo hàm tại điểm này.

Bài tập 6: Cho hàm số :

$$y = |x^2 + 4x + 3|.$$

a. Tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x_0 = -1$.

b. Tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x_0 = -3$.

Bài toán 4: Tính đạo hàm của hàm số trên một khoảng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tính đạo hàm của hàm số:

$$y = f(x)$$

trên khoảng (a, b), bằng định nghĩa, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tính $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 2: Tìm $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Chú ý :

1. Cần lưu ý rằng trong các phép tính này, điểm x coi như cố định còn Δx thì tiến tới 0.
2. Nếu khoảng (a, b) bằng đoạn [a, b], ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ trong khoảng (a, b)

Bước 2: *Tính đạo hàm bên phải* của hàm số $y = f(x)$ tại điểm a.

Bước 3: *Tính đạo hàm bên trái* của hàm số $y = f(x)$ tại điểm b.

Ví dụ 1: Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số:

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Giải

Cho x một số gia Δx, ta có:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.$$

Do đó :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Vậy, ta được $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ví dụ 2: Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số:

$$f(x) = \cos 2x.$$

Giải

Cho x một số gia Δx, ta có:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \cos 2(x + \Delta x) - \cos 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos 2(x + \Delta x) - \cos 2x}{\Delta x} = -\frac{2\sin(2x + \Delta x).\sin \Delta x}{\Delta x}.$$

Do đó :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-2\sin(2x + \Delta x).\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right] = -2\sin 2x.$$

Vậy, ta được $f'(x) = -2\sin 2x$.

Ví dụ 3: Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số:

$$f(x) = \log_{20} x.$$

Giải

Cho x một số gia Δx, ta có:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \log_{20} \frac{x + \Delta x}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_{20} \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x \ln 20} . \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Do đó :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x \ln 20} . \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x \ln 20}.$$

Vậy, ta được $f'(x) = \frac{1}{x \ln 20}$.

Ví dụ 4: Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số:

$$f(x) = 2000^x.$$

Giải

Cho x một số gia Δx, ta có:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 2000^{x + \Delta x} - 2000^x$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2000^{x + \Delta x} - 2000^x}{\Delta x} = 2000^x . \frac{2000^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$= 2000^x . \ln 2000 . \frac{e^{\Delta x \ln 2000} - 1}{\Delta x . \ln 2000}$$

Do đó :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2000^x . \ln 2000 \Rightarrow y' = 2000^x . \ln 2000.$$

Ví dụ 5: Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}.$$

a. Tính đạo hàm của f tại mỗi $x \in \mathbf{R}$.

b. Chứng tỏ rằng đạo hàm f' không liên tục tại $x_0 = 0$.

Giải

a. Ta xét hai trường hợp :

- Với $x \neq 0$, ta có $f'(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$.
- Với $x = 0$, ta có :

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x.\sin\frac{1}{x}.$$

Ta có :

- Với mọi $x \neq 0$ thuộc lân cận của điểm 0 luôn có :

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x\sin\frac{1}{x} \leq |x|.$$

- Mặt khác $\lim\limits_{x \to 0} (-|x|) = \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$.

Suy ra :

$$\lim_{x \to 0} x.\sin\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0.$$

Vậy, ta được:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}.$$

b. Chứng tỏ rằng đạo hàm f' không liên tục tại $x_0 = 0$.

Đặt $g(x) = 2x.\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$.

Chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với:

- $x_n = \dfrac{1}{2n\pi} \Rightarrow x_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và ta được :

$$g(x_n) = 2x_n.\sin\frac{1}{x_n} - \cos\frac{1}{x_n} \xrightarrow{n \to \infty} -1.$$

- $y_n = \dfrac{1}{\pi + 2n\pi} \Rightarrow y_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và ta được:

$$f(y_n) = 2y_n.\sin\frac{1}{y_n} - \cos\frac{1}{y_n} \xrightarrow{n \to \infty} 1.$$

Vậy, $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ không tồn tại.

$\Rightarrow f'(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0 \Rightarrow f'$ không liên tục tại $x_0 = 0$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = c$, với c là hằng số.

b. $f(x) = x$.

c. $f(x) = x^3$.

d. $f(x) = x^n$, với $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Bài tập 2: Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = 2x + 3$.

b. $f(x) = x^2 + x + 1$.

c. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

Bài tập 3: Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{1}{x}$.

b. $f(x) = \frac{x+1}{x}$.

c. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

d. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Bài tập 4: Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \sqrt{2x+1}$.

b. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

c. $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$.

d. $f(x) = \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x}$.

Bài tập 5: Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \sin 2x$.

b. $f(x) = \sin x - \cos x$.

c. $f(x) = \mathrm{tg}x - \mathrm{cotg}x$.

d. $f(x) = \sin x.\cos 2x$

Bài tập 6: Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = x.\sin 2x$.

b. $f(x) = x.\mathrm{cotg}x$.

Bài tập 7: Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = e^x$

b. $f(x) = e^{2x+1}$.

c. $f(x) = a^x$.

d. $f(x) = 2008^x$.

Bài tập 8: Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \ln x$

b. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

c. $f(x) = \log_2(x + 1)$.

d. $f(x) = \log_x(x^2 + 1)$.

Bài toán 5: Sử dụng ý nghĩa hình học của đạo hàm.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các kết quả:

1. Hệ số góc k của cát tuyến MN với đường cong (C): $y = f(x)$, biết M, N theo thứ tự có hoành độ là x_M, x_N, được cho bởi:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_M) - f(x_N)}{x_M - x_N}.$$

2. *Phương trình tiếp tuyến của đồ thị* (C) *của hàm số* $y = f(x)$ *tại điểm* $M_0(x_0, f(x_0))$ *là*:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Ví dụ 1: Tìm hệ số góc của cát tuyến MN với đường cong (C), biết:

a. (C): $y = x^2 - 2x$ và hoành độ M, N theo thứ tự là $x_M = 2$, $x_N = 1$.

b. (C): $y = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ và hoành độ M, N theo thứ tự là $x_M = 1$, $x_N = 3$.

Giải

Gọi k là hệ số góc của cát tuyến MN với đường cong (C).

a. Ta có ngay:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_M) - f(x_N)}{x_M - x_N} = \frac{(2^2 - 2.2) - (1^2 - 2.1)}{2 - 1} = 1.$$

b. Ta có ngay:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_M) - f(x_N)}{x_M - x_N} = \frac{\frac{1^2 + 1 + 1}{1} - \frac{3^2 + 3 + 1}{3}}{1 - 3} = \frac{2}{3}.$$

Ví dụ 2: Cho đường cong:

$$(C): y = \sqrt{x}.$$

Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong (C):

a. Biết rằng hệ số góc của tiếp tuyến bằng 1.

b. Biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng (Δ): $x - 4y + 3 = 0$.

Giải

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

a. Từ điều kiện hệ số góc của tiếp tuyến bằng 1, ta được:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Khi đó, phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): y - y(\frac{1}{4}) = 1.(x - \frac{1}{4}) \Leftrightarrow (d): y - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow (d): y = x + \frac{1}{4}.$$

b. Đường thẳng (Δ) có hệ số góc $k = \frac{1}{4}$.

Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng (Δ) nên có hệ số góc $k = \frac{1}{4}$, do đó

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Khi đó, phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): y - y(4) = \frac{1}{4}.(x - 4) \Leftrightarrow (d): 4(y - 2) = x - 4$$

$$\Leftrightarrow (d): x - 4y + 4 = 0.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm hệ số góc của cát tuyến MN với đường cong (C), biết:

a. (C): $y = x^2 - x + 1$ và hoành độ M, N theo thứ tự là $x_M = 1$, $x_N = 2$.

b. (C): $y = x^3 - x$ và hoành độ M, N theo thứ tự là $x_M = 0$, $x_N = 3$.

c. (C): $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ và hoành độ M, N theo thứ tự là $x_M = 0$, $x_N = 2$.

d. (C): $y = \dfrac{x^2+x}{x-1}$ và hoành độ M, N theo thứ tự là $x_M = -4$, $x_N = -1$.

Bài tập 2: Cho đường cong:

$$(C): y = x^2.$$

Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong (C):

a. Tại điểm M(2, 4).

b. Tại điểm có hoành độ bằng 1.

c. Biết rằng hệ số góc của tiếp tuyến bằng 2.

Bài tập 3: Cho đường cong:

$$(C): y = x^3.$$

Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong (C):

a. Tại điểm M(– 1, – 1).

b. Tại điểm có hoành độ bằng 3.

c. Tại giao điểm của (C) với trục hoành.

d. Biết rằng hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.

Bài tập 4: Cho đường cong:

$$(C): y = \frac{x+2}{x-2}.$$

a. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số tại $x_0 = 1$.

b. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm có hoành độ bằng 1.

CHỦ ĐỀ 2

CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

Định lí: *Đạo hàm của hàm số không đổi bằng 0.*

Tức là:

$$(c)' = 0, \text{ c là hằng số.}$$

Định lí: *Với mọi số tự nhiên* n *và mọi số thực* x (x ≠ 0 *khi* n = 0 *và* n = 1) *ta có*:

$$(x^n)' = n.x^{n-1}.$$

Định lí: *Với mọi* $x \in \mathbf{R}_+^*$ *ta có*:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2. ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG NHỮNG HÀM SỐ

Định lí: *Nếu các hàm số* u = u(x) *và* v = v(x) *có đạo hàm tại điểm* x, *thì tổng (hiệu) của chúng cũng có đạo hàm tại điểm đó và*:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Suy rộng: Ta có:

$$(u_1 \pm u_2 \pm \ldots \pm u_n)' = u'_1 \pm u'_2 \pm \ldots \pm u'_n.$$

Định lí: *Nếu các hàm số* u = u(x) *và* v = v(x) *có đạo hàm tại điểm* x, *thì tích của chúng cũng có đạo hàm tại điểm đó và*:

$$(u.v)' = u'v + u.v'.$$

Hệ quả: *Nếu* k *là hằng số thì*:

$$(ku)' = ku'.$$

Suy rộng: Ta có:

$$(u.v.w)' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'.$$

Định lí: *Nếu các hàm số* u = u(x) *và* v = v(x) *có đạo hàm tại điểm* x và v(x) ≠ 0, *thì thương* $\frac{u}{v}$ *của chúng cũng có đạo hàm tại điểm đó và*:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Hệ quả: *Ta có*:

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

Định lí: *Với mọi số tự nhiên* n *và mọi số thực* x (x ≠ 0 *khi* n ≤ 1) *ta có*:

$$(x^n)' = n.x^{n-1}.$$

3. HÀM SỐ HỢP VÀ ĐẠO HÀM CỦA NÓ

Định nghĩa: *Cho* y *là hàm số của* u, *và* u *là hàm số của* x *thì* y *là hàm số hợp của* x *qua hàm số trung gian* u.

Định lí: *Nếu hàm số* u = g(x) *có đạo hàm theo* x *kí hiệu là* u'_x *và hàm số* y = f(u) *có đạo hàm theo* u *kí hiệu là* y'_u *thì hàm số hợp* y = f(g(x)) *có đạo hàm theo* x *kí hiệu là* y'_x *và ta có*:

$$y'_x = y'_u.u'_x.$$

BẢNG TÓM TẮT

$(u + v - w)' = u' + v' - w'$

$(ku)' = ku'$, k là hằng số

$(u.v)' = u'v + u.v'$.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

$y'_x = y'_u.u'_x$.

II. CÁC VÍ DỤ TÌM ĐẠO HÀM

Ví dụ 1: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = x^5 + 4x^2 - 2x + 3$.

b. $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{2a + b}$.

c. $y = (x + 1)(2x + 3)$.

Giải

a. Ta có:

$$y' = (x^5 + 4x^2 - 2x + 3)' = 5x^2 + 8x - 2.$$

b. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \frac{1}{2a + b}(ax^2 + bx + c)$$

suy ra:

$$y' = \left[\frac{1}{2a + b}(ax^2 + bx + c)\right]' = \frac{1}{2a + b}(ax^2 + bx + c)' = \frac{2ax + b}{2a + b}.$$

c. Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng quy tắc cho hàm số dạng* y = u.v): Ta có:

$$y' = [(x + 1)(2x + 3)]' = (x + 1)'(2x + 3) + (x + 1)(2x + 3)'$$
$$= 1.(2x + 3) + (x + 1).2 = 4x + 5.$$

Cách 2: Viết lại hàm số dưới dạng có:

$$y = 2x^2 + 5x + 3$$

suy ra:

$$y' = (2x^2 + 5x + 3)' = 4x + 5.$$

Ví dụ 2: Tìm đạo hàm của hàm số:

a. $y = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$. b. $y = (x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2)$.

Giải

a. Ta có thể thực hiện theo ba cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng quy tắc cho hàm số dạng* $y = u.v.w$): Ta có:

$$
\begin{aligned}
y' &= [(x + 1)(x + 2)(x + 3)]' \\
&= (x + 1)'(x + 2)(x + 3) + (x + 1)(x + 2)'(x + 3) + (x + 1)(x + 2)(x + 3)' \\
&= 1.(x + 2)(x + 3) + (x + 1).1.(x + 3) + (x + 1)(x + 2).1 \\
&= 3x^2 + 12x + 11.
\end{aligned}
$$

Cách 2: (*Sử dụng quy tắc cho hàm số dạng* $y = u.v$): Viết lại hàm số dưới dạng có:

$$y = (x^2 + 3x + 2)(x + 3)$$

suy ra:

$$
\begin{aligned}
y' &= [(x^2 + 3x + 2)(x + 3)]' = (x^2 + 3x + 2)'(x + 3) + (x^2 + 3x + 2)(x + 3)' \\
&= (2x + 3)(x + 3) + (x^2 + 3x + 2).1 = 3x^2 + 12x + 11.
\end{aligned}
$$

Cách 3: Viết lại hàm số dưới dạng có:

$$y = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

suy ra:

$$y' = (x^3 + 6x^2 + 11x + 6)' = 3x^2 + 12x + 11.$$

b. Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng quy tắc cho hàm số dạng* $y = u.v$): Viết lại hàm số dưới dạng có:

$$
\begin{aligned}
y &= (x^2 - 4)(x^2 - 1) \\
y' &= [(x^2 - 4)(x^2 - 1)]' = (x^2 - 4)'(x^2 - 1) + (x^2 - 4)(x^2 - 1)' \\
&= 2x(x^2 - 1) + (x^2 - 4).2x = 4x^3 - 10x.
\end{aligned}
$$

Cách 2: Viết lại hàm số dưới dạng có:

$$y = x^4 - 5x^2 + 4$$

suy ra:

$$y' = (x^4 - 5x^2 + 4)' = 4x^3 - 10x.$$

Ví dụ 3: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$. b. $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$.

Giải

a. Ta có:

$$y' = \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)' = \frac{(ax + b)'(cx + d) - (ax + b)(cx + d)'}{(cx + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}.$$

b. Ta có:

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}\right)' = \frac{(ax^2 + bx + c)'(dx + e) - (ax^2 + bx + c)(dx + e)'}{(dx + e)^2} \\
&= \frac{adx^2 + 2aex + be - cd}{(dx + e)^2}.
\end{aligned}
$$

Ví dụ 4: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

b. $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

c. $y = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

d. $y = \sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}$.

Giải

a. Đặt $u = x^2 + 1$, ta được $y = \sqrt{u}$.

Khi đó:

$$y' = y'_u.u'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}}.u'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

b. Đặt $u = x^2 + 2x + 3$, ta được $y = \sqrt{u}$.

Khi đó:

$$y' = y'_u.u'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}}.u'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x+3}}.(2x+2) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}.$$

c. Ta có:

$$y' = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{(x-1)'.\sqrt{x^2+1} - (x-1).(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - (x-1).\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\dfrac{x^2+1-x^2+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

d. Biến đổi hàm số về dạng:

$$y = \sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} = x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{6}}.x^{\frac{1}{12}}.x^{\frac{1}{24}} = x^{\frac{5}{8}}.$$

Do đó:

$$y' = \frac{5}{8}.x^{-\frac{3}{8}}.$$

***Chú ý*:** Như vậy, trong câu b) để tính đạo hàm của hàm số, trước tiên chúng ta thực hiện phép đơn giản hoá hàm số, ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ thêm ý tưởng này.

Ví dụ 5: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$.

b. $y = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}$.

Giải

a. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \frac{2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}.$$

Đặt $u = x + 1$ và $v = x - 1$ ta được $y = \sqrt{u} - \sqrt{v}$.

Khi đó:

$$y' = y'_u.u'_x - y'_v.v'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}}.u'_x - \frac{1}{2\sqrt{v}}.v'_x = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

b. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}} = (x+1)^{-\frac{3}{2}}.$$

Đặt $u = x + 1$ ta được $y = u^{-\frac{3}{2}}$.

Khi đó:

$$y' = y'_u.u'_x = -\frac{3}{2}u^{-\frac{3}{2}-1}.u'_x = -\frac{3}{2}(x+1)^{-\frac{5}{2}}.$$

Ví dụ 6: Cho hàm số:

$$y = x^4 - 2x^2 + 2.$$

a. Tìm đạo hàm của hàm số.

b. Tìm x sao cho:

- $y' > 0$.
- $y' < 24$.

Giải

a. Ta có:

$$y' = (x^4 - 2x^2 + 2)' = 4x^3 - 4x.$$

b. Ta lần lượt xét:

- Để $y' > 0$ điều kiện là:

$$4x^3 - 4x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ -1 < x < 0 \end{array}\right..$$

- Để $y' < 24$ điều kiện là:

$$4x^3 - 4x < 24 \Leftrightarrow x^3 - x - 6 < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 3) < 0$$
$$\Leftrightarrow x - 2 < 0 \text{ do } x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 2.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: **Tìm đạo hàm của các hàm số sau:**

a. $y = x^2 + 4x - 3$.

b. $y = x^9 + x^6 - 2x^2 + 1$.

c. $y = (x - 1)(x - 3)$.

d. $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

e. $y = (x - 1)(2x - 3)(3x - 4)(4x - 5)$.

f. $y = (x + 1)^2(x + 2)^3(x + 3)^4$.

Bài tập 2: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = \frac{1}{6x-5}$.

b. $y = \frac{6}{x^2 + 3x + 4}$.

Bài tập 3: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

b. $y = \dfrac{3x+2}{3x-1}$.

c. $y = \dfrac{x^2+1}{2x-1}$.

d. $y = \dfrac{x^2+2x+1}{x-2}$.

Bài tập 4: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{x^2+4x+3}$.

b. $y = \sqrt{x^4+x^2+1}$.

c. $y = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Bài tập 5: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$.

b. $y = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Bài tập 6: Cho hàm số:

$$y = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}.$$

a. Tìm đạo hàm của hàm số.

b. Tìm x sao cho:

- $y' > 0$.
- $y' < 0$.

CHỦ ĐỀ 3

ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. MỞ ĐẦU

Ta có:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$

b. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e;\quad \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

2. BẢNG CÁC ĐẠO HÀM

Đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản	**Đạo hàm của các hàm số hợp ($u = u(x)$)**
$(x^{\alpha})' = \alpha.\, x^{\alpha-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(C)' = 0$ (C là hằng số)	$(u^{\alpha})' = \alpha.u'.u^{\alpha-1}$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(ku)' = k.u'$
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$	$(\sin u)' = u'.\cos u$ $(\cos u)' = -u'.\sin u$ $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'.(1+\tan^2 u)$ $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1+\cot^2 u)$
$(\ln\|x\|)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a\|x\|)' = \frac{1}{x\ln a}$	$(\ln\|u\|)' = \frac{u'}{u}$ $(\log_a\|u\|)' = \frac{u'}{u\ln a}$
$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x.\ln a$	$(e^u)' = u'.e^u$ $(a^u)' = u'.a^u.\ln a$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Tính đạo hàm sử dụng bảng đạo hàm cơ bản.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các kết quả:

a. Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản.

b. Các quy tắc tính đạo hàm.

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

Giải

Ta có:

$$y' = \left(\sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}}\left(x + \sqrt{x^2 - x + 1}\right)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}}\left(1 + \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}\right) = \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2x - 1}{4\sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}.\sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của các hàm số:

a. $y = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x}}}$ với $x \in (0, \pi)$.

b. $y = \dfrac{\text{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})(1 + \sin x)}{\sin x}$.

Giải

a. Biến đổi hàm số về dạng:

$$y = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\frac{x}{4}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4}}$$

$$= \sqrt{\cos^2\frac{x}{8}} = \cos\frac{x}{8}.$$

Do đó:

$$y' = \left(\cos\frac{x}{8}\right)' = -\frac{1}{8}\sin\frac{x}{8}.$$

b. Biến đổi hàm số về dạng:

$$y = \frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})(1 + \sin x)}{\sin x} = \frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2})^2}{\sin x}$$

$$= \frac{2\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})}{\sin x} = \frac{2\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})}{\sin x} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin x} = \text{cot}.$$

Do đó:

$$y' = (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số:

$$y = \ln\frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}.$$

Giải

Ta có:

$$y' = \left(\ln\frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\right)' = \frac{1}{\frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}}\left(\frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\right)'$$

$$= \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}.\frac{(2x - \sqrt{2})(x^2 + x\sqrt{2} + 1) - (2x + \sqrt{2})(x^2 - x\sqrt{2} + 1)}{(x^2 + x\sqrt{2} + 1)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}(x^2 - 1)}{(x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)} = \frac{2\sqrt{2}(x^2 - 1)}{x^4 + 1}.$$

Chú ý: Để tính đạo hàm của hàm số $y = |f(x)|$ trên miền E sao cho $f(x) \neq 0$ ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \sqrt{f^2(x)}.$$

Bước 2: Ta được:

$$y' = \frac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}} = \frac{f'(x).f(x)}{|f(x)|}.$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \begin{cases} f(x) & \text{với } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{với } f(x) < 0 \end{cases}.$$

Bước 2: Ta được:

$$y' = \begin{cases} f'(x) & \text{với } f(x) > 0 \\ -f'(x) & \text{với } f(x) < 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 4: Tính đạo hàm của hàm số sau tại các điểm $x \neq 1$:

$$y = |x - 1|.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \sqrt{(x-1)^2}.$$

Ta được:

$$y' = \frac{2(x-1)'.(x-1)}{2\sqrt{(x-1)^2}} = \frac{x-1}{|x-1|} = \begin{cases} 1 & \text{với } x > 1 \\ -1 & \text{với } x < 1 \end{cases}.$$

Cách 2: Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \begin{cases} x-1 & \text{với } x > 1 \\ 1-x & \text{với } x < 1 \end{cases}.$$

Ta được:

$$y' = \begin{cases} 1 & \text{với } x > 1 \\ -1 & \text{với } x < 1 \end{cases}.$$

Ví dụ 5: Cho với $x \neq 0$, $a > 0$. Tính đạo hàm của hàm số:

$$g(x) = \ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+a}}{x}\right|.$$

Giải

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $x > 0$, ta được:

$$g(x) = \ln\frac{1+\sqrt{x^2+a}}{x}.$$

Khi đó:

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{x^2+a}}{x}\right)'}{\frac{1+\sqrt{x^2+a}}{x}} = \frac{\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}.x-(1+\sqrt{x^2+a})}{x^2}}{\frac{1+\sqrt{x^2+a}}{x}} = -\frac{\sqrt{x^2+a}+a}{x(1+\sqrt{x^2+a})\sqrt{x^2+a}}$$

Trường hợp 2: Với $x < 0$, ta được:

$$g(x) = \ln\left(-\frac{1+\sqrt{x^2+a}}{x}\right).$$

Khi đó:

$$g'(x) = \frac{\left(-\frac{1+\sqrt{x^2+a}}{x}\right)'}{-\frac{1+\sqrt{x^2+a}}{x}} = \frac{\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}.x-(1+\sqrt{x^2+a})}{x^2}}{\frac{1+\sqrt{x^2+a}}{x}} = -\frac{\sqrt{x^2+a}+a}{x(1+\sqrt{x^2+a})\sqrt{x^2+a}}$$

Tóm lại, với $\forall x \neq 0$ và $a > 0$ ta luôn có:

$$g'(x) = -\frac{\sqrt{x^2+a}+a}{x(1+\sqrt{x^2+a})\sqrt{x^2+a}}.$$

Chú ý: Để tính đạo hàm của hàm số $y = \log_{v(x)}u(x)$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Thực hiện phép đổi cơ số, ta được:

$$y = \frac{\ln[u(x)]}{\ln[v(x)]}.$$

Bước 2: Lấy đạo hàm.

Ví dụ 6: Tính đạo hàm của hàm số:

$$y = \log_{2x}(3x+1).$$

Giải

Viết lại hàm số dưới dạng $y = \log_{2x}(3x+1) = \dfrac{\ln(3x+1)}{\ln(2x)}$.

Khi đó:

$$y' = \left[\frac{\ln(3x+1)}{\ln(2x)}\right]' = \frac{[\ln(3x+1)]'.\ln(2x) - \ln(3x+1).[\ln(2x)]'}{[\ln(2x)]^2}$$

$$= \frac{\frac{3}{3x+1}.\ln(2x) - \frac{2}{2x}.\ln(3x+1)}{[\ln(2x)]^2} = \frac{3x\ln(2x) - (3x+1)\ln(3x+1)}{x(3x+1)[\ln(2x)]^2}$$

Chú ý: Nếu u, v là hàm số có đạo hàm theo x là u' và v' và với $u > 0$ thì đạo hàm của hàm số $y = u^v$ được tính theo phương pháp Lepnit và I.Becnuli như sau:

Bước 1: Lấy loga cơ số e hai vế của hàm số, ta được:

$$\ln y = \ln[u(x)^{v(x)}] \Leftrightarrow \ln y = v(x).\ln[u(x)]$$

Bước 2: Lấy đạo hàm theo x cả hai vế, ta được:

$$\frac{y'}{y} = v'(x).\ln[u(x)] + \frac{u'}{u}.v(x),$$

$$\Leftrightarrow y' = y\{v'(x).\ln[u(x)] + \frac{u'}{u}.v(x)\} = u(x)^{v(x)}.\{v'(x).\ln[u(x)] + \frac{u'}{u}.v(x)\}.$$

Ví dụ 7: Tính đạo hàm của hàm số:

$$y = (x^2+1)^{\cos x}.$$

Giải

Ta có:

$$\ln y = \cos x.\ln(x^2+1)$$

Lấy đạo hàm theo x cả hai vế ta được:

$$\frac{y'}{y} = (\cos x)'.\ln(x^2+1) + [\ln(x^2+1)]'.\cos x = -\sin x.\ln(x^2+1) + \frac{2x.\cos x}{x^2+1},$$

$$\Rightarrow y' = y[-\sin x.\ln(x^2+1) + \frac{2x.\cos x}{x^2+1}]$$

$$= (x^2+1)^{\cos x}[-\sin x.\ln(x^2+1) + \frac{2x.\cos x}{x^2+1}].$$

Ví dụ 8: Chứng minh rằng hàm số sau có đạo hàm không phụ thuộc x:

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x.\cos^2 x.$$

Giải

Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x.\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) + 3\sin^2 x.\cos^2 x = 1.$$

Khi đó:

$$y' = (1)' = 0.$$

Vậy, hàm số có đạo hàm không phụ thuộc x.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tính đạo hàm của các hàm số sau trên khoảng xác định:

a. $y = 3\sin^2 x - 2\sin^3 x$.

b. $y = \cos 3x.\cos 2x$.

c. $y = (1 + \cot x)^2$.

d. $y = \cot^3(2x + 45^0)$.

Bài tập 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau trên khoảng xác định:

a. $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

b. $y = \dfrac{1}{(1 + \sin^2 2x)^2}$.

Bài tập 3: Tính đạo hàm của các hàm số sau trên khoảng xác định:

a. $y = \sqrt{2 + tg^2 x}$.

b. $y = \sqrt{1 + \cos^2 \dfrac{x}{2}}$.

c. $y = \left(\dfrac{tg\dfrac{x}{2}}{1 - tg^2\dfrac{x}{2}}\right)^2$.

Bài tập 4: Tính đạo hàm của các hàm số sau trên khoảng xác định:

a. $y = (x^2 - 2x + 3)e^x$.

b. $y = (\sin x - \cos x)e^x$.

c. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

d. $y = 2^x + 3^x$.

Bài tập 5: Tính đạo hàm của các hàm số sau trên khoảng xác định:

a. $y = \ln(x^2 + 1)$.

b. $y = (1 + \ln x)\ln x$.

c. $y = x^2.\ln\sqrt{x^2 + 1}$.

d. $y = \sqrt{1 + \ln x}$.

e. $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

f. $y = \dfrac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$.

Bài tập 6: Cho a > 0, tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$.

b. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$.

Bài tập 7: Tính đạo hàm của các hàm số sau trên khoảng xác định:

a. $y = \ln\left|\dfrac{1 - x}{1 + x}\right|$.

b. $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{|x|}$.

Bài tập 8: Tính đạo hàm của các hàm số sau trên khoảng xác định:

a. $y = \ln|\tan x| - \dfrac{1}{2\sin^2 x}$. b. $y = \ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right| - \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$.

Bài tập 9: Tính đạo hàm của các hàm số sau trên khoảng xác định:

a. $y = \log_{(2x+1)}(x^2 + 1)$.

b. $y = \log_{(x^2+x+2)}(\sqrt{x^2+1} + 1)$.

c. $y = \log_{[\ln(x^2+1)+1]}(e^x + 1)$.

Bài tập 10: Tính đạo hàm của các hàm số sau trên khoảng xác định:

a. $y = \log_{\sin x}(\cos x + 1)$.

b. $y = \log_{\cos^2 x}(\sin x + \cos x)$.

Bài tập 11: Tính đạo hàm của các hàm số:

a. $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$.

b. $y = x^{2x} + x^{(2x)^{4x}} + x^{(2x)^{(4x)^{8x}}}$.

Bài tập 12: Tính đạo hàm của các hàm số:

a. $y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^x$. b. $y = \left(\sqrt{x^2+1} + 2\right)^{e^x}$.

Bài tập 13: Chứng minh rằng hàm số sau có đạo hàm không phụ thuộc x:

$$y = \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) +$$
$$+ \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x.$$

Bài toán 2: Phương trình, bất phương trình chứa đạo hàm.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Bài toán thường được đặt ra dưới dạng:

"*Cho hàm số* $y = f(x)$, *hãy giải phương trình* $g(y, y') = 0$"

Khi đó, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tính đạo hàm y'.

Bước 2: Chuyển phương trình $g(y, y') = 0$ về phương trình đại số thông thường để giải.

Ví dụ 1: Cho hàm số:

$$y = 4\sin x + 3\cos x + 5x.$$

Hãy giải phương trình $y' = 0$.

Giải

Ta có:

$$y' = 4\cos x - 3\sin x + 5.$$

Khi đó:

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4\cos x - 3\sin x + 5 = 0 \Leftrightarrow 3\sin x - 4\cos x = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x = 1.$$

Đặt $\frac{3}{5} = \cos\alpha$ và $= \frac{4}{5}\sin\alpha$, phương trình được chuyển về dạng:

$$\sin x.\cos\alpha - \cos x.\sin\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin(x - \alpha) = 1$$

$$\Leftrightarrow x - \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \alpha + \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \alpha + \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 2: Cho hàm số:

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}.$$

Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\frac{2f^2(x)}{(3-2x)f'(x)} = \sqrt{2m + x - x^2}. \qquad (1)$$

Giải

Ta có:

$$f'(x) = \frac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}.$$

Khi đó, phương trình (1) có dạng:

$$\frac{2(-x^2+3x-2)(-2x+3)}{2(3-2x)\sqrt{-x^2+3x-2}} = \sqrt{2m + x - x^2}$$

$$\overset{x\neq\frac{3}{2}}{\Leftrightarrow} \sqrt{-x^2+3x-2} = \sqrt{2m+x-x^2} \overset{x\neq\frac{3}{2}}{\Leftrightarrow} -x^2+3x-2 = 2m+x-x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-2 \geq 0 \\ x \neq \frac{3}{2} \\ x = m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x = m+1 \neq \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Do đó, để phương trình có nghiệm, điều kiện là:

$$\begin{cases} 1 \leq m+1 \leq 2 \\ m+1 \neq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m \leq 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy, với $m \in [0, 1]\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, phương trình có nghiệm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hàm số:

$$y = -\cos x + \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x + x.$$

Hãy giải phương trình $y' = 0$.

Bài tập 2: Cho hàm số:

$$y = \cos x.$$

Hãy giải phương trình $1 + \tan x + 2y'\sqrt{2} = 0$.

Bài tập 3: Cho hàm số:

$$y = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Hãy giải phương trình $y'.y = x + 1$.

Bài tập 4: Cho hàm số:

$$y = \sqrt{2x + 3}.$$

Hãy giải phương trình $x.y' = 1$.

Bài toán 3: Sử dụng đạo hàm chứng minh đẳng thức.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta đã biết nếu một hàm số không đổi trong khoảng (a, b) thì đạo hàm luôn triệt tiêu trong khoảng đó. Đảo lại ta có định lí sau:

Định lí 1. *Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trong khoảng (a, b) và $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$ thì hàm số $y = f(x)$ không đổi trong khoảng (a, b).*

Từ đó, để thực hiện các dạng toán:

Dạng 1: Chứng minh rằng :

$$A(x) = c, \forall x \in D$$

Ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Tính $A'(x)$, rồi khẳng định $A'(x) = 0, \forall x \in D$.

Bước 2: Chọn $x_0 \in D \Rightarrow A(x_0) = c$.

Dạng 2: Tìm điều kiện của tham số để biểu thức $A(x)$ không phụ thuộc vào x.

Ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Tính $A'(x)$, rồi tìm điều kiện để $A'(x) = 0, \forall x$.

Bước 2: Kết luận.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi x ta đều có :

$$\cos^2(x - a) + \sin^2(x - b) - 2\cos(x - a).\sin(x - b).\sin(a - b) = \cos^2(a - b).$$

Giải

Xét hàm số $y = \cos^2(x - a) + \sin^2(x - b) - 2\cos(x - a).\sin(x - b).\sin(a - b)$.

Ta có :

$$\begin{aligned} y' &= -2\sin(x - a)\cos(x - a) + 2\sin(x - b)\cos(x - b) + \\ &\quad + 2\sin(a - b)[\sin(x - a).\sin(x - b) - \cos(x - a).\cos(x - b)] \\ &= -\sin 2(x - a) + \sin 2(x - b) - 2\sin(a - b).\cos(2x - a - b) \\ &= 2\cos(2x - a - b).\sin(a - b) - 2\sin(a - b).\cos(2x - a - b) = 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ Hàm số không đổi.

Ngoài ra ta còn có $y = y(b) = \cos^2(a - b)$.

Vậy $y = \cos^2(a - b)$.

Ví dụ 2: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x :

$$A = \sin^2(x - \frac{2\pi}{3}) + \sin^2 x + \sin^2(x + \frac{2\pi}{3}).$$

Giải

Xét hàm số

$$A = \sin^2(x - \frac{2\pi}{3}) + \sin^2 x + \sin^2(x + \frac{2\pi}{3}).$$

Ta có :

$$A_x = 2\sin(x - \frac{2\pi}{3}).\cos(x - \frac{2\pi}{3}) + 2\sin x.\cos x + 2\sin(x + \frac{2\pi}{3}).\cos(x + \frac{2\pi}{3})$$

$$= \sin(2x - \frac{4\pi}{3}) + \sin 2x + \sin(2x + \frac{4\pi}{3})$$

$$= 2\sin 2x.\cos\frac{4\pi}{3} + \sin 2x = -\sin 2x + \sin 2x = 0$$

$\Leftrightarrow$ Hàm số không đổi.

Ngoài ra ta còn có $A = A(0) = \frac{3}{2}$.

Vậy $A = \frac{3}{2}$ không phụ thuộc vào x.

Ví dụ 3: Tìm a sao cho biểu thức :

$$A = \cos 2x - a.\sin^2 x + 2\cos^2 x$$

không phụ thuộc x.

Giải

Ta có :

A không phụ thuộc x $\Leftrightarrow A'_x = 0\ \forall x$

$\Leftrightarrow -2\sin 2x - 2a.\cos x.\sin x - 4\sin x.\cos x = 0\ \forall x$

$\Leftrightarrow -(a + 4)\sin 2x = 0\ \forall x \Leftrightarrow a = -4$.

Vậy, với $a = -4$ thì A không phụ thuộc x.

Ví dụ 4: Tìm m để phương trình sau nghiệm đúng với mọi x:

$$\sin^m x + \cos^m x = 1.$$

Giải

Đặt $f(x) = \sin^m x + \cos^m x$, khi đó yêu cầu bài toán được phát biểu dưới dạng:

$$f(x) = 1,\ \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0,\ \forall x & (1) \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 & (2) \end{cases}$$

Giải (1) : Ta được:

$m.\cos x.\sin^{m-1}x - m\sin x.\cos^{m-1}x = 0,\ \forall x$

$\Leftrightarrow m.\sin x.\cos x(\sin^{m-2}x - \cos^{m-2}x) = 0,\ \forall x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ \sin^{m-2}x = \cos^{m-2}x,\ \forall x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right. .$$

Ta xét từng trường hợp của m để giải (2):

- Với m = 0, ta được :

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^0 = 2, \text{ không thoả mãn.}$$

- Với m = 2, ta được :

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1, \text{ thoả mãn.}$$

Vậy, với m = 2 phương trình nghiệm đúng với mọi x.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh rằng :

a. $\sin^6x + \cos^6x = \frac{3}{8}\cos4x + \frac{5}{8}$.

b. $\cos3x.\sin^3x + \sin3x.\cos^3x = \frac{3}{4}\sin4x$.

c. $\sin x\sin(\frac{\pi}{3} - x)\sin(\frac{\pi}{3} + x) = \frac{1}{4}\sin3x$.

d. $\tan(x - \frac{\pi}{3}) + \tan x + \tan(x + \frac{\pi}{3}) = 3\tan3x$.

Bài tập 2: Tìm a, b sao cho các phương trình sau nghiệm đúng với mọi x:

a. $a.\cos^2x + b[\cos^2(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos^2(x - \frac{2\pi}{3})] = \frac{3}{2}$.

b. $a.\cos^2x + b[\cos^2(x + \frac{\pi}{3}) + \cos^2(x - \frac{\pi}{3})] = \frac{3}{2}$.

Bài tập 3: Tìm a, b sao cho các phương trình sau nghiệm đúng với mọi x:

a. $a(\cos x - 1) - \cos(ax + b^2) + b^2 + 1 = 0$.

b. $a.\cos4x + 4a.\cos2x + b = \cos^4x$.

c. $2a.\sin x - a.\sin3x + b\sin5x = \sin^5x$.

Bài tập 4: Tìm a, b sao cho phương trình sau nghiệm đúng với mọi x :

$$\frac{ax^2 + bx + 1}{x^2 + bx + a} = 1.$$

Bài toán 4: Sử dụng định nghĩa đạo hàm tính giới hạn của hàm số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Giả sử cần xác định giới hạn:

$$L = \lim_{x\to x_0} Q(x),$$

ta có thể thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định một hàm $f(x) \Rightarrow f(x_0)$

Xác định $f'(x) \Rightarrow f'(x_0)$.

Bước 2: Khéo léo biến đổi giới hạn trên về một trong các dạng:

$$L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\text{hoặc } L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.P(x) = f'(x_0).P(x_0) \text{ với } P(x_0) \neq \infty$$

$$\text{hoặc } L = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \text{ với } g'(x_0) \neq 0.$$

Ví dụ 1: Tính giới hạn:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x + 8} - 3}{x^2 + 2x - 3}.$$

Giải

Cách 1: Sử dụng một hàm số.

Đặt $f(x) = \sqrt{x + 8} - 3$, ta có $f(1) = 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + 8}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{6}.$$

Khi đó:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x + 8} - 3}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.\frac{1}{x + 3} = f'(1).\frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

Cách 2: Sử dụng hai hàm số.

Đặt $f(x) = \sqrt{x + 8} - 3$, ta có $f(1) = 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + 8}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{6}.$$

Đặt $g(x) = x^2 + 2x - 3$, ta có $g(1) = 0$ và $g'(x) = 2x + 2 \Rightarrow g'(1) = 4$.

Khi đó:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x + 8} - 3}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}}{\dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1}} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{1}{24}.$$

Ví dụ 2: Tính giới hạn:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{5 - x^3} - \sqrt[3]{x^2 + 7}}{x^2 - 1}.$$

Giải

Đặt $f(x) = \sqrt{5 - x^3} - \sqrt[3]{x^2 + 7}$, ta có $f(1) = 0$,

$$f'(x) = -\frac{3x^2}{2\sqrt{5 - x^2}} - \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 7)^2}} \Rightarrow f'(1) = -\frac{11}{12}.$$

Khi đó:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}.\frac{1}{x+1}=f'(1).\frac{1}{2}=-\frac{11}{24}.$$

Ví dụ 3: Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2001)\sqrt[7]{1-2x}-2001}{x}.$$

Giải

Đặt $f(x)=(x^2+2001)\sqrt[7]{1-2x}-2001$, ta có $f(0)=0$,

$$f'(x)=2x\sqrt[7]{1-2x}-\frac{2(x^2+2001)}{7\sqrt[7]{(1-2x)^6}}\Rightarrow f'(0)=-\frac{4002}{7}.$$

Khi đó:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2001)\sqrt[7]{1-2x}-2001}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=-\frac{4002}{7}.$$

Ví dụ 4: Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}.$$

Giải

Đặt $f(x)=1-\sqrt{2x+1}+\sin x$, ta có $f(0)=0$ và $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}+\cos x\Rightarrow f'(0)=0$.

Đặt $g(x)=\sqrt{3x+4}-2-x$, ta có $g(0)=0$,

$$g'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}-1\Rightarrow g'(0)=-\frac{1}{4}.$$

Khi đó:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=0.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tính các giới hạn:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$.

c. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$.

d. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2x}{tg(x-1)}$.

Bài tập 2: Tính các giới hạn:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt[9]{x^2+1}}{\sin 2x}$.

b. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\tan 2x.\tan(\dfrac{\pi}{4}-x)$.

CHỦ ĐỀ 4

VI PHÂN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ *xác định trên khoảng* (a, b) *và có đạo hàm tại* $x \in (a, b)$. *Cho số gia* Δx *tại* x *sao cho* $x + \Delta x \in (a, b)$.

Ta gọi tích $f'(x)\Delta x$ (hoặc $y'\Delta x$) *là vi phân của hàm số* $y = f(x)$ *tại* x *ứng với số gia* Δx *và ký hiệu là* dy *hoặc* $df(x)$.

Như vậy, ta có :

$$dy = y'\Delta x, \qquad (1)$$

hoặc $$df(x) = f'(x)\,\Delta x. \qquad (1')$$

Áp dụng định nghĩa trên và hàm số $y = x$, ta được:

$$dx = (x)'\Delta x = 1.\Delta x = \Delta x. \qquad (2)$$

Vậy ta có:

$$dy = y'dx \qquad (3)$$

hoặc $$df(x) = f'(x)dx. \qquad (3')$$

2. ỨNG DỤNG CỦA VI PHÂN VÀO PHÉP TÍNH GẦN ĐÚNG

Theo định nghĩa đạo hàm ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Do đó, với $|\Delta x|$ đủ nhỏ thì :

$$f'(x_0) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \Delta y \approx f'(x_0)\Delta x \Leftrightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

$$\Leftrightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Đó là công thức tính gần đúng đơn giản nhất.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Tính vi phân.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tính vi phân của hàm số $y = f(x)$, ta sử dụng công thức:

$$dy = y'dx.$$

Ví dụ 1: Tính vi phân của mỗi hàm số sau:

a. $y = x^2 - x\sqrt{x} + x + 8$. b. $y = \sqrt{ax + b}$.

Giải

a. Ta có ngay:

$$dy = y'dx = (x^2 - x\sqrt{x} + x + 8)'dx = (2x - \frac{3}{2}\sqrt{x} + 1)dx.$$

b. Ta có ngay:

$$dy = y'dx = (\sqrt{ax+b})'dx = \frac{adx}{2\sqrt{ax+b}}.$$

Ví dụ 2: Tính vi phân của mỗi hàm số sau:

a. $y = \tan^2 x$. b. $y = \sin x.\sin 2x$.

Giải

a. Ta có ngay:

$$dy = y'dx = (\tan^2 x)'dx = 2\tan x.\frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{2tgx.dx}{\cos^2 x}.$$

b. Ta có ngay:

$$dy = y'dx = (\sin x.\sin 2x)'dx = (\cos x.\sin 2x + 2\sin x.\cos 2x)dx.$$

Ví dụ 3: Tính vi phân của mỗi hàm số sau:

a. $y = 2^{-\frac{1}{\sin x}}$. b. $y = \ln\left[tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)\right]$.

Giải

a. Ta có ngay:

$$dy = y'dx = \left(2^{-\frac{1}{\sin x}}\right)'dx = \left(-\frac{1}{\sin x}\right)'.2^{-\frac{1}{\sin x}}.\ln 2.dx$$

$$= \frac{\cos x}{\sin^2 x}.2^{-\frac{1}{\sin x}}.\ln 2.dx.$$

b. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \ln\left(\cot g\frac{x}{4}\right).$$

Ta có ngay:

$$dy = y'dx = \left[\ln\left(\cot g\frac{x}{4}\right)\right]'dx$$

$$= \frac{\left(\cot g\frac{x}{4}\right)'}{\cot g\frac{x}{4}}.dx = \frac{-\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{4}}}{\cot g\frac{x}{4}}.dx = -\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng nếu các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì tại điểm đó ta có:

$$d(uv) = vdu + udv.$$

Ta có:

$$d(uv) = (uv)'_x dx = (u'_x v + uv'_x)dx = u'_x vdx + uv'_x dx$$

$$= v(u'_x dx) + u(v'_x dx) = vdu + udv.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tính vi phân của mỗi hàm số sau:

a. $y = x^2\sqrt{x} + 3x^2 - \sqrt{x} + 6$. b. $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Bài tập 2: Tính vi phân của mỗi hàm số sau:

a. $y = \dfrac{2x+1}{3x+2}$. b. $y = \dfrac{3x+4}{x+1}$.

Bài tập 3: Tính vi phân của mỗi hàm số sau:

a. $y = \dfrac{x^2+1}{2x-3}$. b. $y = \dfrac{x^2+2x+1}{x-2}$.

Bài tập 4: Tính vi phân của mỗi hàm số sau:

a. $y = \cos x.\cos 2x$. b. $y = \cos x.\cos 2x.\cos 4x.\cos 8x$.

Bài tập 5: Tính vi phân của mỗi hàm số sau:

a. $y = 2^{-\frac{1}{\cos x}}$. b. $y = \ln\left[\cot g\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2}\right)\right]$.

Bài tập 6: Chứng minh rằng nếu các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì tại điểm đó ta có:

a. $d(u + v) = du + dv$.

b. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Bài toán 2: Ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng công thức:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Ví dụ 1: Tính giá trị gần đúng của $\sqrt{4,01}$.

Giải

Xét hàm số:

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Khi đó:

$$\sqrt{4,01} = f(4 + 0,01) \approx f(4) + f'(4).0,01 = \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}.0,01 = 2,0025.$$

Ví dụ 2: Tính giá trị gần đúng của $\cos 61^0$.

Giải

Xét hàm số:

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x.$$

Khi đó:

$$\cos 61^0 = f(60^0 + 1^0) \approx f(60^0) + f'(60^0).\frac{3,14}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{3,14}{180} = 0,485.$$

Ví dụ 3: Tính giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{215}$.

Giải

Xét hàm số:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Khi đó:

$$\sqrt[3]{215} = f(216 - 1) \approx f(216) - f'(216).1 = 6 - \frac{1}{108} = 5,991.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tính gần đúng các giá trị sau:

a. $\sqrt{9,011}$.

b. $\sqrt{16,02}$

Bài tập 2: Tính gần đúng các giá trị sau:

a. $\sqrt[3]{28}$.

b. $\sqrt[3]{26}$.

Bài tập 3: Tính gần đúng các giá trị sau:

a. $\sin 31^0$.

c. $\tan 121^0$.

b. $\cos 46^0 + \sin 91^0$.

d. $\tan 59^0 - \cot 29^0$.

Bài tập 4: Tính gần đúng các giá trị sau:

a. $e^{0,2}$.

b. $e^{\sin 61^0}$.

CHỦ ĐỀ 5

ĐẠO HÀM CẤP CAO

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$.

Đạo hàm của hàm số $f'(x)$, nếu có, được gọi là *đạo hàm cấp hai* của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y'' hay $f''(x)$.

Tương tự, đạo hàm của hàm số $f''(x)$, nếu có, được gọi là *đạo hàm cấp ba* của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y''' hay $f'''(x)$.

Đạo hàm của hàm số $f'''(x)$, nếu có, được gọi là *đạo hàm cấp bốn* của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y'''' hay $f^{(4)}(x)$...

Tổng quát, *đạo hàm của đạo hàm cấp* $(n - 1)$ *được gọi là đạo hàm cấp* n *của hàm số* $y = f(x)$, *kí hiệu là* $y^{(n)}$ *hay* $f^{(n)}(x)$.

Vậy:

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]', \text{ với } n \in \mathbf{Z},\ n \geq 2.$$

2. Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI

Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình:

$$s = f(t), \text{ với } f(t) \text{ là hàm số có đạo hàm.}$$

Khi đó, gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t *là đạo hàm cấp hai của hàm số* $s = f(t)$ *tại* t.

$$\gamma(t) = f''(t).$$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Đạo hàm cấp cao.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng định nghĩa về đạo hàm cấp cao.

Ví dụ 1: Chứng tỏ rằng hàm số $y = a\cos x + b\sin x$, trong đó a, b là các hằng số tuỳ ý, thoả mãn phương trình:

$$y'' + y = 0.$$

Giải

Lấy đạo hàm liên tiếp hai lần, ta được:

$$y' = -a\sin x + b\cos x,\quad y'' = -a\cos x - b\sin x = -y.$$

Do đó:

$$y'' + y = -y + y = 0.$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số:

$$y = x\sqrt{1+x^2}\,.$$

Giải

Ta có :

$$y' = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,,$$

$$y'' = \left(\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{4x\sqrt{1+x^2} - (1+2x^2)x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2} = \frac{(3+2x^2)x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số:

$y = u^v$ với $u > 0$ và giả sử u, v là các hàm khả vi hai lần theo x.

Giải

Ta có:

$$y' = u^v\left(v'\ln u + \frac{u'v}{u}\right),$$

$$y'' = \left[u^v\left(v'\ln u + \frac{u'v}{u}\right)\right]' = (u^v)'.\left(v'\ln u + \frac{u'v}{u}\right) + (u^v).\left(v'\ln u + \frac{u'v}{u}\right)'$$

$$= u^v\left[\left(v'\ln u + \frac{u'v}{u}\right)^2 + v''\ln u + \frac{uu''v + 2uu'v' - (u')^2 v}{u^2}\right].$$

Ví dụ 4: Giả sử hàm số f(x) xác định và có đạo hàm cấp hai khi $x \le x_0$. Xác định các số a, b, c để hàm số :

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \text{ khi } x \le x_0 \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c \text{ khi } x > x_0 \end{cases}$$

cũng có đạo hàm cấp hai.

Giải

Trước hết hàm số F(x) phải có đạo hàm cấp 1 tại điểm $x_0 \Leftrightarrow$ các đạo hàm một phía tại điểm liên tục x_0 của hàm F(x) phải bằng nhau.

Bởi vậy cần có:

$f(x_0) = c$ (tính liên tục của hàm F(x)).

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0) = b, \text{ tức là } F'(x_0) = b\,.$$

Tiếp theo, để có đạo hàm cấp hai cần có :

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{F'(x_0+\Delta x) - F'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{F'(x_0+\Delta x) - F'(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f'_-(x_0+\Delta x) - f'_-(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2a\Delta x + b - b}{\Delta x} = 2a.$$

Vậy, điều kiện là:

$$a = \frac{1}{2}f''_-(x_0),\ b = f'_-(x_0) \text{ và } c = f(x_0).$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tính đạo hàm cấp ba của các hàm số :

a. $y = ax^2 + bx + c$.

b. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

c. $y = x.e^x$.

d. $y = x.\ln x$.

e. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

f. $y = x.\sin 2x$.

Bài tập 2: Tính đạo hàm cấp hai các hàm số :

a. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

b. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$.

Bài tập 3: Chứng tỏ rằng mỗi hàm số sau đây thoả mãn hệ thức tương ứng đã cho:

a. $y = e^{4x} + 2e^{-x}$; $y''' - 13y' - 12y = 0$.

b. $y = \sqrt{2x - x^2}$; $y''.y^3 + 1 = 0$.

c. $y = \dfrac{x-3}{x+4}$; $2(y')^2 = y''.(y - 1)$.

Bài tập 4: Cho hàm số y = f(x) khả vi ba lần. Tìm y'' và y''', biết:

a. $y = f(e^x)$.

b. $y = f(x^x)$.

Bài toán 2: Tìm công thức đạo hàm cấp n.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với hàm số y = f(x), để tìm được công thức $f^{(n)}(x)$ ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tính f'(x), f''(x) (đôi khi cần tính tới $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$).

Bước 2: Dự đoán công thức tổng quát $f^{(n)}(x)$.

Bước 3: Chứng minh công thức dự đoán bằng phương pháp quy nạp.

Chú ý:

1. Cần nhớ các công thức cơ bản sau:

   a. $(x^m)^{(n)} = m(m-1)...(m-n+1).x^{m-n}$.

   b. $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

   c. $(a^x)^{(n)} = a^x.\ln^n a$, với a > 0.

   d. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\dfrac{\pi}{2})$.

   e. $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\dfrac{\pi}{2})$.

2. *Công thức Lepnit*: Nếu u và v là các hàm khả vi n lần thì :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i\, u^{(i)}.v^{(n-i)}.$$

Ví dụ 1: Cho hàm số :

$$y = e^x.$$

Tính đạo hàm cấp n của hàm số.

Giải

Ta có:

$$y' = e^x \text{ ; } y'' = e^x \ldots$$

Dự đoán $y^{(n)} = e^x$.

Ta đi chứng minh dự đoán trên bằng quy nạp – *Bạn đọc tự làm.*

Ví dụ 2: Cho hàm số:

$$y = \frac{1}{x}.$$

Tính đạo hàm cấp n của hàm số.

Giải

Ta có:

$$y' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2}, \quad y'' = (-1)(-2)x^{-3} = (-1)^2.2!.x^{-2-1},$$

$$y^{(3)} = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = (-1)^3.3!.x^{-3-1}, \ldots$$

Dự đoán $y^{(n)} = (-1)^n.n!.x^{-n-1}$.

Ta đi chứng minh dự đoán trên bằng quy nạp – *Bạn đọc tự làm.*

Ví dụ 3: Cho hàm số:

$$y = \sin x.$$

Chứng minh rằng:

$$y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2}).$$

Giải

Ta chứng minh bằng quy nạp.

- **Với n = 1, ta có:**

$$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \text{ đúng.}$$

- **Giả sử công thức đúng với n = k, tức là:**

$$y^{(k)} = \sin(x + k\frac{\pi}{2}).$$

- **Ta chứng minh công thức đúng với n = k + 1, tức là chứng minh:**

$$y^{(k+1)} = \sin[x + (k+1)\frac{\pi}{2}].$$

Thật vậy:

$$y^{(k+1)} = [y^{(k)}]' = [\sin(x + k\frac{\pi}{2})]' = \cos(x + k\frac{\pi}{2}) = \sin(x + k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$$

$$= \sin[x + (k+1)\frac{\pi}{2}].$$

Vậy, ta được:

$$y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2}).$$

Chú ý : Như vậy, chúng ta đã làm quen được với việc xác định công thức tính đạo hàm cấp n của một số hàm cơ bản. Việc mở rộng các công thức đó dựa trên kết quả của định lí sau:

Định lí : Chứng minh rằng nếu hàm số f(x) có đạo hàm cấp n, thì :

$$[f(ax + b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax + b). \qquad (1)$$

Chứng minh

Ta chứng minh bằng quy nạp.

- Với n = 1, ta có:

$$[f(ax + b)]' = a.f'(ax + b).$$

- Giả sử đẳng thức (1) đúng với n = k, tức là ta có:

$$[f(ax + b)]^{(k)} = a^k f^{(k)}(ax + b). \qquad (2)$$

- Ta chứng minh (1) cũng đúng với n = k + 1, tức là phải chứng minh :

$$[f(ax + b)]^{(k+1)} = a^{k+1} f^{(k+1)}(ax + b). \qquad (3)$$

Thật vậy, đạo hàm (2) theo x, ta nhận được (3), đó là điều phải chứng minh.

Các ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ tận dụng kết quả của định lí này để dự đoán công thức cho $y^{(n)}$.

Ví dụ 4: Cho hàm số:

$$y = \frac{1}{1 + x}.$$

Tính đạo hàm cấp n của hàm số.

Giải

Ta lần lượt có:

$$y' = -\frac{1}{(1 + x)^2}\ ;\ y'' = \frac{2}{(1 + x)^3} \text{ và } y''' = -\frac{2.3}{(1 + x)^4}.$$

Dự đoán $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.n!}{(1 + x)^{n+1}}$. (1)

Ta đi chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp.

- Với n = 1, ta có:

$$y' = \frac{(-1).1!}{(1 + x)^{1+1}} = -\frac{1}{(1 + x)^2} \text{ đúng.}$$

- Giả sử công thức đúng với n = k, tức là:

$$y^{(k)} = \frac{(-1)^k.k!}{(1 + x)^{k+1}}.$$

- Ta đi chứng minh (1) đúng với n = k + 1, tức là chứng minh:

$$y^{(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}.(k + 1)!}{(1 + x)^{k+2}}.$$

Thật vậy:

$$y^{(k+1)} = [y^{(k)}]' = [\frac{(-1)^k.k!}{(1+x)^{k+1}}]' = (-1)^k.k!\left[\frac{1}{(1+x)^{k+1}}\right]'$$

$$= (-1)^k.k!\left[-\frac{k+1}{(1+x)^{k+2}}\right] = \frac{(-1)^{k+1}.(k+1)!}{(1+x)^{k+2}}, \text{đpcm.}$$

Vậy, ta được :

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

Ví dụ 5: Cho hàm số:

$$y = \frac{1}{x^2-3x+2}.$$

Tính đạo hàm cấp n của hàm số.

Giải

Trước hết ta đưa hàm số về dạng thuận tiện để lấy đạo hàm, ta có:

$$y = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{(A+B)x - A - 2B}{(x-2)(x-1)}$$

Suy ra:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A-2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}.$$

Do đó hàm số được viết lại dưới dạng:

$$y = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

Từ đó ta dự đoán kết quả là:

$$y^{(n)} = (-1)^n.n!.\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - (-1)^n.n!.\frac{1}{(x-1)^{n+1}}$$

$$= (-1)^n.n!.\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right].$$

Ta đi chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp – *Đề nghị bạn đọc tự làm*

Ví dụ 6: Cho hàm số:

$$y = \ln\frac{a+bx}{a-bx}.$$

Tính đạo hàm cấp n của hàm số.

Giải

Lấy đạo hàm ta có :

$$y' = \frac{\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)'}{\frac{a+bx}{a-bx}} = \frac{2ab}{(a+bx)(a-bx)} = \frac{b}{a+bx} + \frac{b}{a-bx}.$$

Đạo hàm của y' với (n – 1) lần được $y^{(n)}$, ta dự đoán kết quả là :

$$y^{(n)} = \frac{b.(-1)^{n-1}.(n-1)!b^{n-1}}{(a+bx)^n} + \frac{b.(-1)^{n-1}.(n-1)!(-b)^{n-1}}{(a-bx)^n}$$

$$= (n-1)!.b^n.\left[\frac{(-1)^{n-1}}{(a+bx)^n} + \frac{1}{(a-bx)^n}\right].$$

Ta chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp – *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Ví dụ 7: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = \sin^2x$, từ đó suy ra đạo hàm cấp n của hàm số $y = \cos^2x$.

Giải

Nhận xét rằng :

$$(\sin x)' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \text{ và } (\cos x)' = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2}).$$

Do đó :

$$y = \sin^2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2}[1 + \sin(2x - \frac{\pi}{2})].$$

$$y' = \frac{1}{2}.2\sin(2x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin 2x,$$

$$y'' = 2\sin(2x + \frac{\pi}{2}) \text{ và } y^{(3)} = 2^2\sin(2x + 2.\frac{\pi}{2}),$$

Dự đoán :

$$y^{(n)} = 2^{n-1}\sin[2x + (n-1).\frac{\pi}{2}].$$

Ta chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp – *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Từ hằng đẳng thức:

$\cos^2x + \sin^2x = 1 =$ hằng số

$$\Rightarrow (\cos^2x)^{(n)} = -(\sin^2x)^{(n)} = -2^{n-1}\sin[2x + (n-1).\frac{\pi}{2}].$$

Ví dụ 8: Cho hàm số:

$$y = \sin^3x.$$

Tính đạo hàm cấp n của hàm số.

Giải

Trước hết ta đưa hàm số về dạng thuận tiện để lấy đạo hàm, ta có :

$$y = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x.$$

Từ đó ta dự đoán kết quả là :

$$y^{(n)} = \frac{3}{4}\sin(x + n\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{4}.3^n.\sin(3x + n\frac{\pi}{2}).$$

Ta chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp – *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Ví dụ 9: Cho hàm số:

$$y = \sin ax \sin bx.$$

Tính đạo hàm cấp n của hàm số.

Giải

Trước hết ta đưa hàm số về dạng thuận tiện để lấy đạo hàm, ta có :

$$y = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x].$$

Từ đó ta dự đoán kết quả là :

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}\{(a-b)^n.\cos[(a-b)x + n\frac{\pi}{2}] - (a+b)^n.\cos[(a+b)x + n\frac{\pi}{2}]\}.$$

Ta chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp – *Đề nghị bạn đọc tự àm.*

Ví dụ 10: Cho hàm số:

$$y = x\cos ax.$$

Tính đạo hàm cấp n của hàm số.

Giải

Sử dụng công thức Lepnit , ta dự đoán kết quả là :

$$y^{(n)} = xa^n.\cos(ax + n\frac{\pi}{2}) + C_n^1 a^{n-1}.\cos[ax + (n-1)\frac{\pi}{2}].$$

Ta chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp – *Đề nghị bạn đọc tự àm.*

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hàm số:

$$y = \cos x.$$

Chứng minh rằng $y^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$.

Bài tập 2: Cho hàm số:

$$y = \ln|x|.$$

Chứng minh rằng $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}.(n-1)!}{x^n}$.

Bài tập 3: Cho hàm số:

$$y = \frac{2}{1-x^2}.$$

a. Tìm a, b sao cho $y = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$.

b. Tính $y^{(n)}$.

Bài tập 4: Cho hàm số :

$$y = \frac{2x+3}{x^2+3x+2}.$$

a. Tìm a, b sao cho $y = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2}$.

b. Tính $y^{(n)}$.

Bài tập 5: Cho hàm số:

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + x - 1}.$$

Chứng minh rằng $y^{(n)} = (-1)^n.n!\left[\frac{2^{n-1}}{(2x-1)^{n+1}} - \frac{2}{(x+1)^{n+1}}\right]$.

Bài tập 6: Cho hàm số:

$$y = \frac{5x^2 - 3x - 20}{x^2 - 2x - 3}.$$

Tính đạo hàm cấp n của f(x) (không phải chứng minh).

Bài tập 7: Tính $y^{(n)}$ của các hàm số sau:

a. $y = \cos^3 x$.

b. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

c. $y = \sin ax \cos bx$.

d. $y = \sin^2 ax \cos bx$.

e. $y = \sin ax \cos^2 bx$.

f. $y = \ln(2x+1)$.

Bài tập 8: Cho đa thức:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0.$$

a. Chứng minh rằng $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

b. *Áp dụng*: tính hệ số của x^2 trong khai triển $f(x) = (x^2 - x + 1)^{2008}$.

ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG IV

ĐỀ SỐ 1

(*Thời gian 90 phút*)

Câu I. (6 điểm):

a. (1 điểm): Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x + 2$ tại điểm $x_0 = 6$.

A. $f'(6) = 8$. **B.** $f'(6) = 4$. **C.** $f'(6) = -4$. **D.** $f'(6) = 1$.

b. (2 điểm): Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 0.$$

A. $f'(0) = 1$. **B.** $f'(0) = -1$. **C.** $f'(0) = 0$. **D.** $f'(0) = \dfrac{3}{2}$.

c. (2 điểm): Tìm a, b để hàm số sau có đạo hàm tại điểm $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ -x^2 + ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}.$$

A. $a = -2, b = \dfrac{1}{4}$. **C.** $a = \dfrac{1}{2}, b = -1$.

B. $a = 4, b = -2$. **D.** $a = -1, b = 2$.

d. (1 điểm): Tìm hệ số góc của cát tuyến MN với đường cong (C), biết:

(C): $y = x^2 - x + 1$ và hoành độ M, N theo thứ tự là $x_M = 1$, $x_N = 2$.

A. $k = 1$. **B.** $k = 2$. **C.** $k = 3$. **D.** $k = \dfrac{7}{2}$.

Câu II. (2 điểm):

a. (1 điểm): Tìm đạo hàm của hàm số sau:

$$y = \frac{1}{6x - 5}.$$

A. $y' = \dfrac{1}{6x-5}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{6}$. **C.** $y' = 0$. **D.** $y' = \dfrac{6}{(6x-5)^2}$.

b. (1 điểm): Hãy giải phương trình $y' = 0$, biết $y = -\cos x + \sin x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + x$.

A. $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ và $x = \pi + 2k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ và $x = \pi + 2k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu III. (1 điểm): Tính gần đúng giá trị $\sqrt{9,011}$.

Câu IV. (1 điểm): Cho hàm số:

$$y = \cos x.$$

Chứng minh rằng $y^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$.

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian 90 phút)

Câu I. (6 điểm):

a. (1 điểm): Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số sau đây tại điểm x_0 tương ứng:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \text{ với } x_0 = -1.$$

A. $f'(-1) = 2$. **B.** $f'(-1) = 1$. **C.** $f'(-1) = 0$. **D.** $f'(-1) = -3$.

b. (2 điểm): Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos 2x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 0.$$

A. $f'(0) = -1$. **B.** $f'(0) = 1$. **C.** $f'(0) = 2$. **D.** $f'(0) = 3$.

c. (2 điểm): Tìm a để hàm số sau có đạo hàm tại x = 0:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + a & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

A. $a = \frac{1}{e}$. **B.** $a = 0$. **C.** $a = -1$. **D.** Vô nghiệm.

d. (1 điểm): Tìm hệ số góc của cát tuyến MN với đường cong (C), biết:

(C): $y = x^3 - x$ và hoành độ M, N theo thứ tự là $x_M = 0$, $x_N = 3$.

A. $k = 8$. **B.** $k = 4$. **C.** $k = \frac{5}{4}$. **D.** $k = \frac{1}{2}$.

Câu II. (2 điểm):

a. (1 điểm): Tìm đạo hàm của hàm số sau:

$$y = \frac{6}{x^2 + 3x + 4}.$$

A. $y' = \dfrac{6}{x^2 + 3x + 4}$. **C.** $y' = 0$.

B. $y' = \dfrac{6}{x + 3}$. **D.** $y' = \dfrac{12x + 18}{(x^2 + 3x + 4)^2}$.

b. (1 điểm): Hãy giải phương trình $1 + \text{tg}x + 2y'\sqrt{2} = 0$, biết:

$y = \cos x$.

A. $x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ với $k \in \mathbf{Z}$.

B. $x = -\dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ với $k \in \mathbf{Z}$.

C. $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \dfrac{11\pi}{12} + 2k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ với $k \in \mathbf{Z}$.

D. $x = -\dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi$, $x = \dfrac{11\pi}{12} + 2k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ với $k \in \mathbf{Z}$.

Câu III. (1 điểm): Tính gần đúng giá trị $\sqrt{16,02}$.

Câu IV. (1 điểm): Cho hàm số:

$$y = \ln|x|.$$

Chứng minh rằng $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}.(n-1)!}{x^n}$.

MỤC LỤC

GỚI THIỆU CHUNG

CHƯƠNG I

TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

Củ đề 1: Hai quy tắc đến cơ bản 5
Bài toán 1: Sử dụng các quy tắc thực hiện bài toán đếm phương án 8
Bài toán 2: Sử dụng các quy tắc thực hiện bài toán đếm số các số hình thành từ tập A 12
Củ đề 2: Hoán vị và các bài toán liên quan 19
Bài toán 1: Rút gọn biểu thức 19
Bài toán 2: Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức 21
Bài toán 3: Giải phương trình, bất phương trình và hệ 24
Bài toán 4: Thực hiện bài toán đếm 25
Củ đề 3: Chỉnh hợp và các bài toán liên quan 30
Bài toán 1: Rút gọn biểu thức 30
Bài toán 2: Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức 32
Bài toán 3: Giải phương trình, bất phương trình và hệ 32
Bài toán 4: Thực hiện bài toán đếm 35
Củ đề 4: Tổ hợp và các bài toán liên quan 41
Bài toán 1: Rút gọn biểu thức 41
Bài toán 2: Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức 44
Bài toán 3: Giải phương trình, bất phương trình và hệ 49
Bài toán 4: Thực hiện bài toán đếm 54
Củ đề 5: Các dạng bài toán đếm 59
Bài toán 1: Đếm số các số hình thành từ tập A 59
Bài toán 2: Đếm số phương án 71
Bài toán 3: Các bài toán khác 74
Củ đề 6: Công thức nhị thức Niutơn 76
Bài toán 1: Khai triển nhị thức 77
Bài toán 2: Rút gọn và tính giá trị của biểu thức 79
Bài toán 3: Sử dụng khai triển nhị thức Niutơn chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức tổ hợp 84
Bài toán 4: Giá trị của hệ số trong khai triển nhị thức Niutơn 93
Bài toán 5: Hệ số lớn nhất trong khai triển nhị thức Niutơn 100

CHƯƠNG II
DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

Chủ đề 1: Dãy số 108

Bài toán 1: Mở đầu về dãy số 110

Bài toán 2: Sử dụng phương pháp quy nạp chứng minh dãy số (u_n) thoả mãn tính chất K 112

Bài toán 3: Xác định công thức của dãy số (u_n) 114

Bài toán 4: Xét tính đơn điệu của một dãy số (u_n) 117

Bài toán 5: Xét tính bị chặn của một dãy số (u_n) 120

Chủ đề 2: Cấp số cộng 123

Bài toán 1: Chứng minh tính chất của một cấp số cộng 123

Bài toán 2: Chứng minh ba số lập thành một cấp số cộng 125

Bài toán 3: Tìm điều kiện của tham số để ba số lập thành một cấp số cộng 126

Bài toán 4: Tìm các phần tử của một cấp số cộng (u_n) 130

Bài toán 5: Tính tổng 132

Chủ đề 3: Cấp số nhân 133

Bài toán 1: Chứng minh tính chất của một cấp số nhân 133

Bài toán 2: Chứng minh ba số lập thành một cấp số nhân 134

Bài toán 3: Tìm điều kiện của tham số để ba số lập thành một cấp số nhân 135

Bài toán 4: Tìm các phần tử của một cấp số nhân (u_n) 137

Bài toán 5: Tính tổng 139

CHƯƠNG III
GIỚI HẠN

Chủ đề 1: Giới hạn của dãy số 144

Bài toán 1: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ 145

Bài toán 2: Chứng minh một dãy số có giới hạn 147

Bài toán 3: Tính giới hạn của dãy số bằng các định lí về giới hạn 149

Chủ đề 2: Định nghĩa và các định lí về giới hạn của hàm số 153

Bài toán 1: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. 155

Bài toán 2: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ 156

Bài toán 3: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ 157

Bài toán 4: Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ không tồn tại 157

Bài toán 5: Giới hạn của hàm số kép 158

Bài toán 6: Sử dụng nguyên lí kẹp giữa tìm giới hạn của hàm số 160
Bài toán 7: Dùng các định lí về giới hạn và giới hạn cơ bản để tìm giới hạn 161
Chủ đề 3: Các dạng vô định 163
Bài toán 1: Tính giới hạn dạng $\frac{0}{0}$ 163
Bài toán 2: Tính giới hạn dạng $\frac{\infty}{\infty}$ 168
Bài toán 3: Giới hạn dạng $\infty - \infty$ 170
Bài toán 4: Giới hạn của hàm số lượng giác 171
Bài toán 5: Giới hạn dạng 1^{∞}, $0.\infty$, ∞^{0} 174
Chủ đề 4: Hàm số liên tục 178
Bài toán 1: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm – Dạng I 179
Bài toán 2: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm – Dạng II 181
Bài toán 3: Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng 183
Chủ đề 5: Tính chất của hàm số liên tục 185
Bài toán 1: Sử dụng tính liên tục của hàm số chứng minh phương trình có nghiệm 185
Bài toán 2: Sử dụng tính liên tục của hàm số xét dấu hàm số 190

CHƯƠNG IV

ĐẠO HÀM

Chủ đề 1: Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm 194
Bài toán 1: Tính đạo hàm của hàm số tại một điểm – dạng 1 197
Bài toán 2: Tính đạo hàm của hàm số tại một điểm – dạng 2 198
Bài toán 3: Tính đạo hàm của hàm số tại một điểm – dạng 3 200
Bài toán 4: Tính đạo hàm của hàm số trên một khoảng 204
Bài toán 5: Sử dụng ý nghĩa hình học của đạo hàm 207

Chủ đề 2: Các quy tắc tính đạo hàm 210

Chủ đề 3: Đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản 216
Bài toán 1: Tính đạo hàm sử dụng bảng đạo hàm cơ bản 217
Bài toán 2: Phương trình, bất phương trình chứa đạo hàm 222
Bài toán 3: Sử dụng đạo hàm chứng minh đẳng thức 224
Bài toán 4: Sử dụng đạo hàm tính giới hạn của hàm số 226

Chủ đề 4: Vi phân 229
Bài toán 1: Tính vi phân 229
Bài toán 2: Ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng 231

Chủ đề 5: Đạo hàm cấp cao 233
Bài toán 1: Đạo hàm cấp cao 233
Bài toán 2: Tìm công thức đạo hàm cấp n 235

SÁCH PHÁT HÀNH TẠI

KONTUM:
CÔNG TY CP SÁCH TBTH - 129 Phan Đình Phùng
LÂM ĐỒNG:
CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 09 Nguyễn Văn Cừ – Đà Lạt
CÔNG TY CP IN VÀ PHS – 18 Khu Hòa Bình – Đà Lạt
DAK NÔNG:
CÔNG TY SÁCH TBTH – 151 Hai Bà Trưng
NS GIÁO DỤC – 30 Trần Hưng Đạo – Gia Nghĩa
ĐỒNG NAI:
NS KIM NGÂN – 88 Cách mạng tháng Tám – Biên Hòa
TÂY NINH:
NS VĂN NGHỆ – 295 Đường 30 tháng 4
LONG AN:
CÔNG TY PHS – 04 Võ Văn Tần – TX. Tân An
TIỀN GIANG:
CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 22 Hùng Vương – TP. Mỹ Tho
VĨNH LONG:
HS MƯỜI – 15 Lê Thái Tổ
CẦN THƠ:
CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 132 Đường 30 tháng 4
HẬU GIANG:
CÔNG TY SÁCH TBTH – 50 Nguyễn Thái Học – TX Vị Thanh
ĐỒNG THÁP:
NS VIỆT HƯNG – 200 Nguyễn Huệ – TP. Cao Lãnh
BẾN TRE:
CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 03 Đồng Khởi
SÓC TRĂNG:
NS TRẺ – 41 Trần Hưng Đạo
AN GIANG:
TT VĂN HÓA TỔNG HỢP – 15 – 17 Hai Bà Trưng
BẠC LIÊU:
CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 59 Lý Thường Kiệt – Phường 3
TRUNG TÂM PHS – 57 Hoàng Văn Thụ
KIÊN GIANG:
NS ĐÔNG HỒ I – 98B Trần Phú – Rạch Giá
NS ĐÔNG HỒ II – 989 Nguyễn Trung Trực – Rạch Giá
CÀ MAU:
CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 26 – 28 Lê Lợi – Phường 2
TRÀ VINH:
NS LIÊN SƯƠNG – 127 Trần Quốc Tuấn

SÁCH CÓ BÁN LẺ TẠI CÁC CỬA HÀNG SÁCH TRÊN TOÀN QUỐC